Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos - 2023

Prova escrita de conhecimentos específicos de Matemática

Instruções gerais

1. A prova é constituída por 2 grupos de questões obrigatórias.

2. A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos;

3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efetuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento;

4. Não utilize qualquer tipo de corretor. Se necessário risque ou peça uma troca de folha;

5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza eletrónica (telemóvel, *ipad*, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados), exceto máquina de calcular para realizar cálculos e obter representações gráficas de funções, devidamente autorizadas.

6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (cartão de cidadão, bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte);

7. A cotação de cada questão encontra-se na última página da prova.

Leiria, 24 de junho de 2023

Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos – 2023

Prova de Avaliação de MATEMÁTICA

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova de avaliação tem **9 páginas**.
- A prova de avaliação inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova de avaliação encontram-se na **página 9**.

Grupo I

- As **dez questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos nem justificações**.

1. Considere em $\mathbb{R}$ os polinómios P e Q definidos por,

$$P(x) = 2x^3 + ax^2 + b \qquad \text{e} \qquad Q(x) = x^2 - x + 1$$

onde a e b são constantes reais.

Quais os valores de a e de b de modo que o resto da divisão do polinómio P pelo polinómio Q seja o polinómio $x - 5$?

(**A**) $a = 1 \wedge b = 2$. (**B**) $a = -1 \wedge b = 2$.

(**C**) $a = 1 \wedge b = -2$. (**D**) $a = -1 \wedge b = -2$.

2. Considere a função f, real de variável real, duas vezes diferenciável no seu domínio.

Sabe-se que $f(a) > 0$, $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$, com $a \in D_f$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(**A**) f' tem um mínimo relativo em $x = a$.

(**B**) f tem um máximo relativo em $x = a$.

(**C**) f tem um mínimo relativo em $x = a$.

(**D**) f' tem um máximo relativo em $x = a$.

3. Considere a sucessão (u_n) definida por,

$$u_n = \frac{n + \cos(n)}{n}$$

onde cos designa o cosseno.

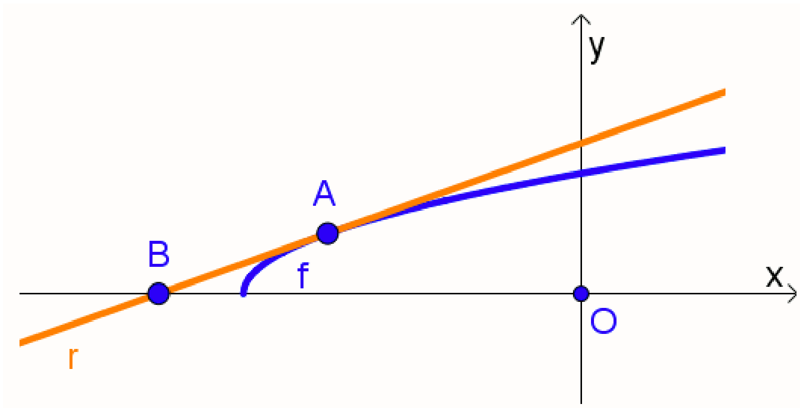
Qual é o valor do limite $\lim u_n$?

(**A**) $-\infty$. (**B**) 0. (**C**) 1. (**D**) $+\infty$.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por, $f(x) = \sqrt{x+8}$, ilustrada na figura.

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto A de abcissa -6;
- o ponto B é o ponto de interseção da reta r com o eixo OX.



Qual é as coordenadas do ponto B?

(A) $(-10, 0)$. **(B)** $(-8, 0)$. **(C)** $\left(-6\sqrt{2}, 0\right)$. **(D)** $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

5. Considere que α é um ângulo tal que,

$$-180^\circ < \alpha < -90^\circ \wedge \cos(\alpha + 180^\circ) = \frac{4}{5}$$

onde cos designa o cosseno.

Qual é o valor da expressão designatória definida por,

$$\frac{\cos(\alpha) - \sin(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)}$$

onde sin designa o seno e tan designa a tangente?

(A) $\frac{16}{125}$. **(B)** $-\frac{16}{125}$. **(C)** $-\frac{125}{16}$. **(D)** $-\frac{7}{125}$.

6. Considere a função f, real de variável real, definida por,

$$f(x) = 1 - 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

onde cos designa o cosseno.

Qual é o ponto no qual a função f atinge um máximo absoluto?

(A) $\left(\frac{\pi}{12}, 3\right)$. **(B)** $\left(\frac{7\pi}{12}, 3\right)$. **(C)** $\left(\frac{\pi}{12}, -1\right)$. **(D)** $\left(\frac{7\pi}{12}, -1\right)$.

7. Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência,

$$u_n = \begin{cases} 3 & se \quad n = 1 \\ u_{n-1} + 2n & se \quad n > 1 \end{cases}$$

e a sucessão (v_n) cujo termo geral é $v_n = 5n - 13$.

Qual é o valor de n para o qual $v_n = u_2$?

(A) 6. **(B)** 5. **(C)** 4 **(D)** 3.

8. Considere que para assistirem a um espetáculo, o João, a Patrícia e mais cinco amigos sentam-se, ao acaso, numa fila com sete lugares.

Qual é a probabilidade do João e a Patrícia não ficarem sentados um ao lado do outro?

(A) $\frac{2 \times 5!}{7!}$. **(B)** $\frac{5}{7}$. **(C)** $\frac{2}{7}$. **(D)** $\frac{5!}{7!}$.

9. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados Ω finito e dois acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, associados a essa experiência.

Sabe-se que $P(A) = 0,70$, $P(A \cap B) = 0,20$ e $P(A \cup B) = 0,90$.

Qual é o valor de $P(A|B)$?

(A) $\frac{1}{3}$. **(B)** $\frac{1}{2}$. **(C)** $\frac{1}{4}$. **(D)** $\frac{1}{5}$.

10. Considere que numa turma, 20 % dos alunos fala fluentemente espanhol (E), 45 % dos alunos fala fluentemente inglês (I) e 15 % dos alunos fala fluentemente os dois idiomas.

Qual é a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, não falar fluentemente espanhol, sabendo que não fala fluentemente inglês?

(A) $\frac{10}{11}$. **(B)** $\frac{1}{2}$. **(C)** $\frac{3}{10}$. **(D)** $\frac{9}{20}$.

Grupo II

• Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.

• Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.

• **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere a função racional f, real de variável real, definida por,

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 4}.$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) Determine o domínio e os zeros da função f.

   (b) Determine a simplificação da função f realizando a divisão polinomial.

   (c) Estude a monotonia da função f.

   (d) Indique, justificando, se a função f tem pontos de inflexão.

2. Na internet, no dia 10 de maio de 2009, pelas 15 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espetáculo. O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda.

   Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em centenas, é dado, aproximadamente, por,

$$N(t) = 8\log_4\left((3t+1)^3\right) - 8\log_4(3t+1)$$

   onde $t \in [0,5]$ e $\log_4$ designa o logaritmo na base 4.

   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) Mostre que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$.

   (b) Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes.

   Observação: apresente o resultado em horas e minutos.

   (c) Determine a primeira derivada da função N.

   (d) Determine uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função N no ponto $t = 1$.

3. Considere a progressão aritmética (u_n).

   Sabe-se que $u_3 = 1$ e $u_{10} = \frac{5}{4}u_9$.

   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) Determine uma expressão do termo geral da progressão.

   (b) Indique, justificando, se -50 é termo da progressão.

   (c) Determine a soma dos 10 termos consecutivos da progressão, a partir do quarto termo (inclusive).

4. Numa escola realizou-se um estudo sobre os hábitos alimentares dos alunos.

   Nesse estudo analisou-se o peso de todos os 200 alunos.

   Sabe-se que:

   - 55 % dos alunos são rapazes;
   - 30 % dos rapazes têm excesso de peso;
   - 40 % das raparigas não têm excesso de peso.

   (a) Pretende-se escolher, ao acaso, três alunos para representarem a escola num concurso. Determine a probabilidade de serem escolhidos dois rapazes e uma rapariga.

   (b) Sabendo que um dos alunos escolhidos ao acaso tem excesso de peso, qual a probabilidade de ser um rapaz?

5. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados Ω finito e dois acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, associados a essa experiência.

   Sabe-se que:

   - $P(A) \neq 0$;
   - $P(B) = \frac{3}{2} P(A)$;
   - $P(B|A) = \frac{1}{2}$.

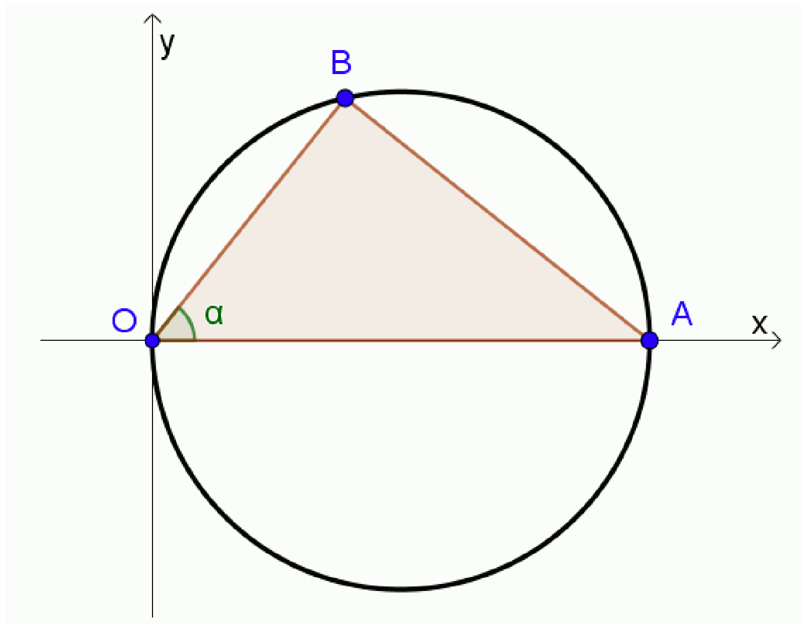
   Mostre que $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) + 2P(A) = 1$.

6. Na figura estão representados, num referencial o.n. xoy uma circunferência e um triângulo.

   Sabe-se que:

   - o triângulo tem vértices B, O, A;
   - a circunferência tem diâmetro $[OA]$;
   - o vértice O do triângulo coincide com a origem do referencial;
   - o vértice A do triângulo tem coordenadas $(2, 0)$;
   - o vértice B do triângulo desloca-se ao longo da semi circunferência superior;

   Para cada posição do vértice B do triângulo, seja α a amplitude do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

(a) Mostre que o perímetro do triângulo $[AOB]$, para qualquer α, é dado por,

$$P(\alpha) = 2(1 + \cos(\alpha) + \sin(\alpha))$$

onde cos designa o cosseno e sin designa o seno.

(b) Determine o valor de α para o qual o perímetro do triângulo é máximo.

FIM da Prova de Avaliação

FORMULÁRIO

Regras de Derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

Área de Figuras Planas

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \cdot Altura$

Probabilidades

$\mu = p_1 \cdot x_1 + \ldots + p_n \cdot x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n \cdot (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$

Progressão geométrica: $u_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Limites Notáveis

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim_{u_n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

COTAÇÕES

Grupo I			**70**
Cada resposta certa		7	
Cada resposta errada, anulada ou não respondida		0	
Grupo II			**130**
1.		30	
(a)	8		
(b)	4		
(c)	12		
(d)	6		
2.		25	
(a)	5		
(b)	9		
(c)	4		
(d)	7		
3.		20	
(a)	10		
(b)	4		
(c)	6		
4.		15	
(a)	8		
(b)	7		
5.		15	
6.		25	
(a)	15		
(b)	10		
Total			**200**