Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade

para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria

dos Maiores de 23 Anos - 2022

Prova Escrita de conhecimentos específicos de

MATEMÁTICA

Instruções Gerais:

1. A prova é constituída por dois grupos de questões obrigatórias.

2. A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos.

3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efetuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento.

4. Não utilize qualquer tipo de corretor. Se necessário risque ou peça uma troca de folha.

5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza eletrónica (telemóvel, *ipad*, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados), exceto máquina de calcular para realizar cálculos e obter representações gráficas de funções, devidamente autorizadas.

6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (cartão de cidadão, bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte).

7. As cotações de cada questão da prova encontram-se na página 8.

Leiria, 04 de junho de 2022

Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos – 2022

Prova de Avaliação de MATEMÁTICA

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova de avaliação tem **8 páginas**.
- A prova de avaliação inclui um **formulário** na **página 7**.
- As **cotações** da prova de avaliação encontram-se na **página 8**.

Grupo I

- As **dez questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos nem justificações**.

1. Considere o polinómio P do 3.^{o} grau tal que:

   - admite as raízes -1, 1 e 2;
   - dividido por $x+2$ dá resto 12.

   Qual é a expressão designatória que define o polinómio P?

   (**A**) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.
   (**B**) $P(x) = -x^3 - 2x^2 - x + 2$.
   (**C**) $P(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$.
   (**D**) $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 2$.

2. Considere a função f, real de variável real, definida por,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x} - 3\ln(-x+1)$$

   onde ln designa o logaritmo de base e e e designa o número de Neper.

   Qual é o domínio da função f?

   (**A**) $D_f =]-\infty; 1[$.
   (**B**) $D_f =]1; +\infty[$.
   (**C**) $D_f =]-\infty; 1[\setminus \{0\}$.
   (**D**) $D_f =]1; +\infty[\setminus \{2\}$.

3. Considere o limite definido por,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n-3}.$$

   Qual é o valor do limite?

   (**A**) e^{-2}.
   (**B**) 1.
   (**C**) e^2.
   (**D**) e^{-3}.

4. Considere que α é um ângulo agudo tal que $\tan(\alpha) = \sqrt{5}$ (tan designa a tangente).

   Qual é o valor da expressão designatória definida por (sin designa o seno e cos designa o cosseno),

$$\sin^2(\alpha) - \cos(2\alpha)\,?$$

   (**A**) 1. (**B**) $\frac{3}{2}$. (**C**) $\frac{5}{6}$. (**D**) $\frac{5}{3}$.

5. Considere a expressão designatória definida por (x é um número real positivo),

$$e^{5\ln(x)} - 10^{-3\log(x)}$$

   onde ln designa o logaritmo de base e, e designa o número de Neper e log designa o logaritmo de base 10.

   Qual das seguintes expressões designatórias é igual à expressão designatória dada?

   (**A**) $\ln(x^5) - \log(x^{-3})$. (**B**) $x^5 + \frac{1}{x^3}$. (**C**) $x^5 - \frac{1}{x^3}$. (**D**) $\frac{\ln(x^5)}{\log(x^3)}$.

6. Considere as funções g e h, reais de variável real, definidas por,

$$g(x) = x\sin(\pi x) \qquad \text{e} \qquad h(x) = e^{1-x^2}$$

   onde sin designa o seno e e designa o número de Neper.

   Qual é o declive da reta tangente ao gráfico da função $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$ no ponto de abcissa -1?

   (**A**) π. (**B**) 0. (**C**) $-\pi$. (**D**) $\pi - 2$.

7. Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência (a é um número real),

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -2u_n + 3,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

   Qual é o terceiro termo desta sucessão?

   (**A**) $6a + 2$. (**B**) $4a + 3$. (**C**) $9a - 3$. (**D**) $4a - 3$.

8. Considere a progressão geométrica de razão $r = 0,5$ e $u_2 = 6$.

   Qual é a soma de todos os seus termos?

   (**A**) $S_\infty = 24$. (**B**) $S_\infty = 12$. (**C**) $S_\infty = 6$. (**D**) $S_\infty = -\infty$.

9. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados Ω finito e dois acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, associados a essa experiência.

   Sabe-se que $P(A) = 0,40$, $P(B) = 0,50$ e $P(A \cup B) = 0,70$, onde P designa a probabilidade.

   Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   (**A**) Os acontecimentos A e B são incompatíveis e são independentes.

   (**B**) Os acontecimentos A e B são incompatíveis e não são independentes.

   (**C**) Os acontecimentos A e B não são incompatíveis e são independentes.

   (**D**) Os acontecimentos A e B não são incompatíveis e não são independentes.

10. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados Ω finito e dois acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, associados a essa experiência. Suponha que $P(A) = 0,30$, $P(B) = 0,40$ e $P(A \cup B) = 0,50$, onde P designa a probabilidade.

    Qual é a probabilidade de se realizar A, sabendo que B se realiza?

    (**A**) $\frac{1}{6}$. (**B**) $\frac{1}{4}$. (**C**) $\frac{1}{3}$. (**D**) $\frac{1}{2}$.

Grupo II

• Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.

• Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.

• **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere as funções reais de variável real:

   - a função polinomial f, definida por, $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$;
   - a função polinomial g, definida por, $g(x) = x^5 + ax^4 - 7x^3 + bx^2 + 6x + c$, onde a, b e c são constantes reais.

   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) Determine a decomposição em fatores do 1.º grau da função polinomial f.

   (b) Determine o valor de a, b e c de modo a que a função polinomial g seja divisível pela função polinomial f.

   (c) Determine o conjunto solução da condição, $f(x) > 0$.

2. Considere a função f, real de variável real, definida por (e designa o número de Neper),

$$f(x) = xe^{1/(x-2)}.$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) Determine o domínio da função f e a derivada da função f.

   (b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

   (c) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $x = 3$.

   (d) Determine o valor do limite, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

3. Considere a progressão aritmética (u_n), de termos positivos.

   Sabe-se que $u_3 = 11$ e $u_5 = 20$.

   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

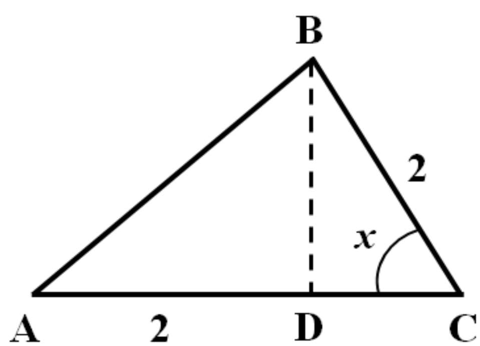
   (a) Determine a razão da progressão e indique uma expressão do termo geral da progressão.

   (b) Determine a soma dos 10 termos consecutivos da progressão, a partir do quinto termo (inclusive).

4. A figura ao lado representa o triângulo $[ABC]$.

   Sabe-se que:

   - x é a amplitude do ângulo BCA;
   - $[BD]$ é a altura relativa ao vértice B;
   - $\overline{AD} = \overline{BC} = 2$.



Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, para qualquer $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, é dada por,

$$A(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$$

   onde sin designa o seno.

   (b) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo é máxima.

5. No balcão de uma geladaria existe um recipiente com dez compartimentos, cinco à frente e cinco atrás, para colocar gelado.

   Em cada compartimento só é colocado um sabor, e nunca existem dois compartimentos com o mesmo sabor.

   Num dia de verão, a geladaria tem oito sabores disponíveis: cinco são de fruta (morango, manga, framboesa, limão e côco) e os outros três são baunilha, chocolate e café.

   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) De quantas maneiras distintas se podem colocar os oito sabores no recipiente?

   (b) De quantas maneiras distintas se podem colocar os oito sabores no recipiente, de tal modo que os cinco de fruta preencham a linha da frente?

6. Uma fábrica produz apenas parafusos da marca A e B. Considere que:

   - 2 % dos parafusos da marca A são defeituosos;
   - 3 % dos parafusos da marca A são defeituosos.

   Numa caixa colocaram-se 1000 parafusos, dos quais 800 são da marca A.

   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   Tirando um parafuso da caixa, ao acaso, determine a probabilidade de:

   (a) ser da marca B.

   (b) ser defeituoso e da marca A.

   (c) ser defeituoso.

   (d) ser defeituoso ou da marca A.

   (e) ser da marca A, sabendo que é defeituoso.

FIM da Prova de Avaliação

FORMULÁRIO

Regras de Derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a(u))' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

Área de Figuras Planas

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \cdot Altura$

Probabilidades

$\mu = p_1 \cdot x_1 + \ldots + p_n \cdot x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n \cdot (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$

Progressão geométrica: $u_1 \cdot \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Limites Notáveis

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{u_n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

COTAÇÕES

Grupo I			**70**
Cada resposta certa		7	
Cada resposta errada, anulada ou não respondida		0	
Grupo II			**130**
1.		25	
(a)	8		
(b)	10		
(c)	7		
2.		25	
(a)	10		
(b)	7		
(c)	4		
(d)	4		
3.		15	
(a)	7		
(b)	8		
4.		25	
(a)	10		
(b)	15		
5.		15	
(a)	5		
(b)	10		
6.		25	
(a)	3		
(b)	4		
(c)	4		
(d)	6		
(e)	8		
Total			**200**