VERSÃO A

- Na sua folha de respostas escreva "**VERSÃO A**".
- **A ausência desta indicação implica a anulação de todas as questões da escolha múltipla**.

- **Identifique claramente os grupos e as questões que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo-saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica-lápis**" e de **corrector**.
- A prova inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova encontram-se na **página 9**.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão, são indicadas **quatro alternativas** de resposta, das quais só **uma está correcta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a questão será anulada.
- As respostas incorrectas terão cotação nula.
- **Não apresente cálculos**, **nem justificações**.

1. Os parâmetros reais A e B, de modo que

$$\frac{A}{x-1} - \frac{B}{x+3} = \frac{-4x}{x^2+2x-3}$$

são:

(**A**) $A=-1$ e $B=-3$.

(**B**) $A=-1$ e $B=3$.

(**C**) $A=1$ e $B=3$.

(**D**) $A=1$ e $B=-3$.

2. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$$

onde ln designa o logarítmo de base e e e designa o número de Neper.

O domínio da função f é:

(**A**) $D_f =]-e, e[$.

(**B**) $D_f =]-2, 2[$.

(**C**) $D_f =]0, +\infty[$.

(**D**) $D_f =]-1, 1[$.

3. Seja α um ângulo do 2^o quadrante tal que $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

   O valor da expressão $\tan\alpha + 1$ é igual a:

   (**A**) $\dfrac{1}{5}$. (**B**) $\dfrac{1}{3}$.

   (**C**) $\dfrac{1}{4}$. (**D**) $\dfrac{1}{2}$.

4. O conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da equação $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}$ é:

   (**A**) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$. (**B**) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi \vee x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$.

   (**C**) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = -\dfrac{\pi}{2} - 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$. (**D**) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = -2k\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{2} - 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Considere as funções reais de variável real definidas por $g(x) = 2^x$ e $h(x) = 3^x$.

   O conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $g(x) > h\,(x)$ é:

   (**A**) $\mathbb{R}^-$. (**B**) $\mathbb{R}$.

   (**C**) $\mathbb{R}^+$. (**D**) Conjunto vazio.

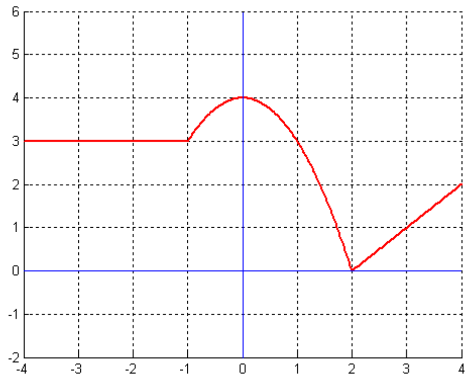
6. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = xe^{-x}$, onde e designa o número de Neper.

   Qual das seguintes expressões define analiticamente a equação da recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1?

   (**A**) $y = \dfrac{1}{e}$. (**B**) $y = x + \dfrac{1}{e}$.

   (**C**) $y = \dfrac{1}{e}x$. (**D**) $y = \dfrac{1}{e}x + 1$.

7. A figura seguinte representa, num referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função real de variável real g no intervalo $[-4, 4]$.

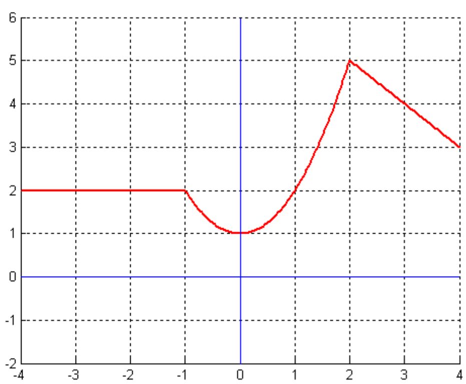


Qual dos seguintes gráficos representa a função real de variável real definida por

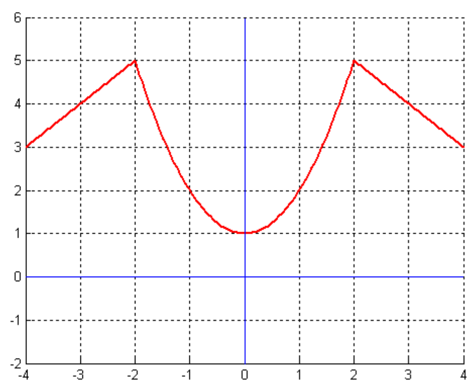
$$h(x) = 5 - g(|x|)$$

no intervalo $[-4, 4]$?

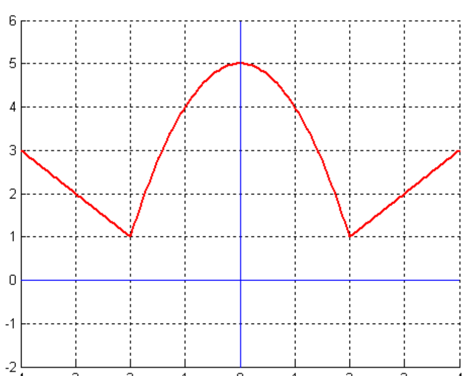
(**A**)



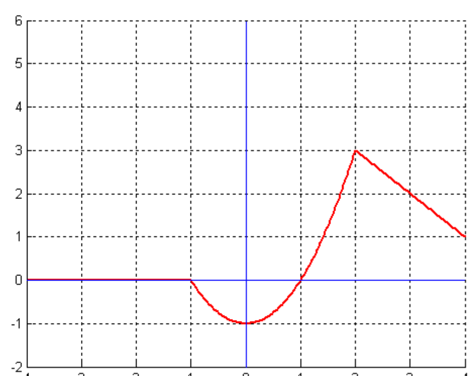
(**B**)



(**C**)



(**D**)



Grupo II

• Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, apresentando **todos os cálculos** que efectuar e **todas as justificações** necessárias.

• Pode recorrer à sua máquina de calcular para efectuar cálculos e obter representações gráficas de funções.

• **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere as seguintes funções reais de variável real:

   - a função cúbica definida por $f(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$;
   - a função cúbica definida por $g(x) = (x - 2)(x^2 - 4x + 3)$;
   - a função de grau quatro definida por $h(x) = 4x^4 - ax^2 + bx - 4$.

   (a) Determine:

      i. $f(2)$.

      ii. os zeros da função f.

      iii. os valores reais de a e b, de modo que a função h seja divisível por $x^2 - 4$.

   (b) Determine os valores de x para os quais:

      i. $f(x)$ e $g(x)$ tomam o mesmo valor.

      ii. $g(x)$ é inferior a zero.

      iii. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 3$.

2. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2x^2+1} & se \quad x < 2 \\ 1 & se \quad x = 2 \\ 5-x & se \quad x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade da função f no ponto de abcissa 2.

(b) Indique, justificando, o valor lógico da afirmação:

"*a função f é derivável no ponto de abcissa* 2".

(c) Determine:

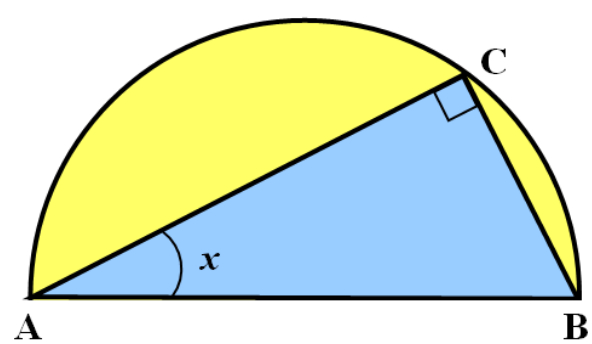
i. a partir da definição $f'(3)$.

ii. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

(d) Determine a função derivada da função f.

3. A figura ao lado representa um semicírculo de diâmetro $[AB]$ e um triângulo $[ABC]$ nele inscrito. Sabe-se que:

- x é a amplitude do ângulo BAC;
- $\overline{AB} = 10$.



Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

(a) Prove que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, para qualquer $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, por

$$A(x) = 25\sin(2x).$$

(b) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo é máxima.

4. Numa certa zona de cultivo, foi detectada uma doença que atinge as culturas.

   A área afectada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir.

   Admita que a área, em hectares, afectada pela doença, é dada, em função do tempo t, por

   $$A(t) = 2 - t + 5\ln(t+1)$$

   sendo t $(0 \leq t < 16)$ o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detectada essa doença (ln designa o logarítmo de base e e e designa o número de Neper).

   Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

   Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

   (a) Quando a doença foi detectada, já uma parte da área de cultivo estava afectada. Passada uma semana, a área de cultivo afectada pela doença aumentou.

   De quanto foi esse aumento?

   Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

   (b) Determine a área máxima afectada pela doença.

   Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

FORMULÁRIO

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Trigonometria

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$

$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

$\sin(2 \cdot a) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\cos(2 \cdot a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

COTAÇÕES

Grupo I				**70**
Cada resposta certa		10		
Cada resposta errada, anulada ou não respondida		0		
Grupo II				**130**
1.			45	
a.		20		
i.	3			
ii.	7			
iii.	10			
b.		25		
i.	7			
ii.	8			
iii.	10			
2.			45	
a.		10		
b.		5		
c.		16		
i.	8			
ii.	8			
d.		14		
3.			20	
a.		10		
b.		10		
4.			20	
a.		6		
b.		14		
Total				**200**