Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos - 2011

Prova escrita de conhecimentos específicos de MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS

Instruções gerais

1. A prova é constituída por **2** grupos de questões sendo o primeiro grupo de escolha múltipla e o segundo de resposta aberta (mais informações nas páginas 1 e 2 do enunciado);
2. A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos;
3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efectuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento;
4. Não utilize qualquer tipo de corrector. Se necessário risque ou peça uma troca de folha;
5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza electrónica (telemóvel, pda, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados), excepto máquina de calcular para realizar cálculos e obter representações gráficas de funções;
6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte).
7. Admite-se que os candidatos utilizem nas respostas a este exame quer a antiga, quer a nova ortografia, sem nenhuma penalização, uma vez que ainda está em vigor o período de transição do novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

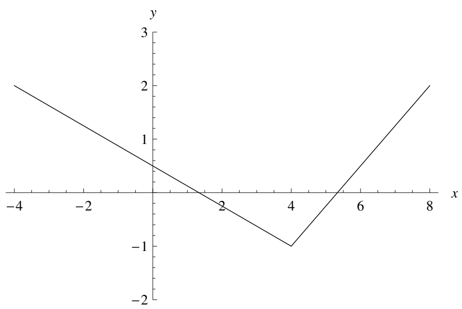
Leiria, 4 de Junho de 2011

- **Identifique claramente os grupos e as questões que responde**.
- A prova inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova encontram-se na **página 9**.

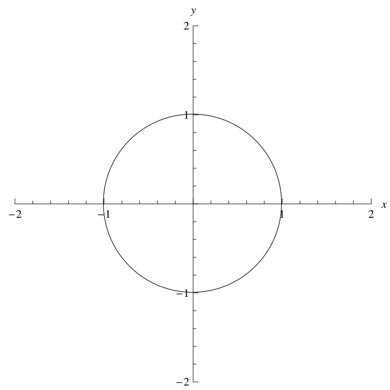
Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada questão, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais apenas uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais que uma letra ou esta for ilegível, a questão será anulada.
- As respostas incorrectas terão cotação nula.
- **Não apresente cálculos nem justificações**.

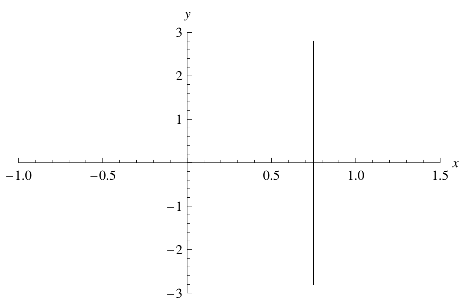
1. De entre as representações seguintes, indique qual pode ser o gráfico de uma função injectiva.



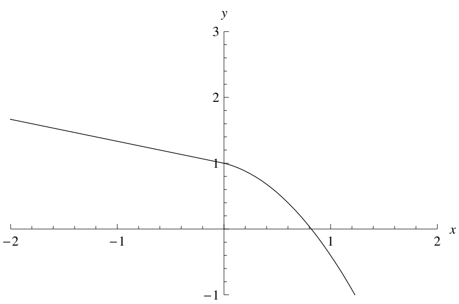
(A)



(B)

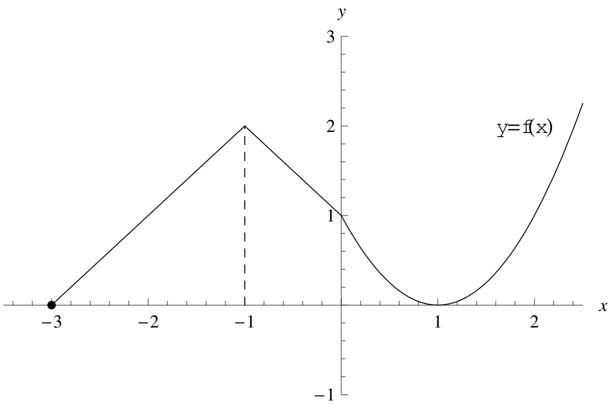


(C)



(D)

2. Na figura seguinte está representado o gráfico de uma função f.



Considere as seguintes afirmações:

I - O domínio da função f é o intervalo $]-3,+\infty[$ e o contradomínio da função f é o intervalo $[0,+\infty[$.

II - A função f tem dois mínimos relativos.

III - No intervalo $]-1,1[$ a função f é estritamente decrescente.

Qual das seguintes alternativas é a correcta?

(**A**) I,II são verdadeiras e III é falsa; (**B**) II,III são verdadeiras e I é falsa;

(**C**) II é verdadeira e I,III são falsas; (**D**) III é verdadeira e II,I são falsas.

3. A empresa de telecomunicações *Speak* anuncia o seguinte plano de preços para as chamadas telefónicas feitas a partir de um telefone registado nessa empresa:

• 10 cêntimos pelo primeiro minuto de conversação (se a chamada durar menos de um minuto, o preço a pagar também é 10 cêntimos);

• 0,2 cêntimos por segundo, a partir do primeiro minuto.

Qual das expressões seguintes dá o preço a pagar, em cêntimos, por uma chamada feita a partir de um telefone registado nessa empresa, em função do tempo t de duração da chamada, medido em segundos?

(**A**) $\begin{cases} 10t & se \quad t \leq 60 \\ 10+0,2(t-60) & se \quad t > 60 \end{cases}$; (**B**) $\begin{cases} 10t & se \quad t \leq 60 \\ 10+0,2t & se \quad t > 60 \end{cases}$;

(**C**) $\begin{cases} 10 & se \quad t \leq 60 \\ 10+0,2(t-60) & se \quad t > 60 \end{cases}$; (**D**) $\begin{cases} 10 & se \quad t \leq 60 \\ 10+0,2t & se \quad t > 60 \end{cases}$.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12$.

   O gráfico da função f intersecta o eixo das abcissas em quatro pontos. Designemos esses quatro pontos por A, B, C e D. Sabe-se que o ponto A tem abcissa -1 e o ponto C tem abcissa 2.

   Podemos concluir que:

   (**A**) o ponto B tem abcissa 1 e o ponto D tem abcissa -2;

   (**B**) o ponto B tem abcissa -3 e o ponto D tem abcissa -2;

   (**C**) o ponto B tem abcissa 0 e o ponto D tem abcissa -1;

   (**D**) o ponto B tem abcissa -2 e o ponto D tem abcissa 4.

5. Considere que se analisaram as idades de 100 árvores da mesma espécie e que se obtiveram os seguintes resultados:

Idades	Nº árvores
1	13
2	22
3	27
4	24
5	11
6	3

   A amplitude interquartil dos dados é:

   (**A**) 2; (**B**) 3;

   (**C**) 3.07; (**D**) 2.53.

6. Suponha que vai ordenar, de forma aleatória, as 4 letras seguintes: A, A, S, S. A probabilidade de formar a palavra "ASAS" é de:

   (**A**) 1/2; (**B**) 1/3;

   (**C**) 1/4; (**D**) 1/6.

Grupo II

• Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que efectuar e **todas as justificações** necessárias.

• Pode recorrer à sua máquina de calcular para efectuar cálculos e obter representações gráficas de funções.

• **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Determine o valor das constantes reais a e b tal que

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^2(x-a)(x-b).$$

2. A relação entre graus Celsius (°C) e os graus Fahrenheit (°F) é a seguinte:

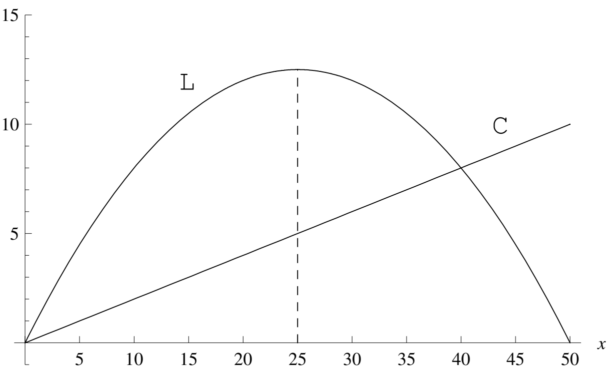
$$\frac{F-32}{9} = \frac{C}{5}. \tag{1}$$

   (a) Indique a quantos graus Celsius ferve a água, sabendo que esta ferve a 212º Fahrenheit.

   (b) Usando a fórmula dada em (1) encontre uma função que forneça os graus Fahrenheit (°F) em função dos graus Celsius (°C).

   (c) Represente geometricamente a função obtida na alínea anterior.

3. Para um certo produto comercializado, o lucro e o custo (em milhares de euros) são dados respectivamente por $L(x) = -0.02x^2 + x$ e $C(x) = 0.2x$, onde a variável $x \in [0, 50]$ representa a quantidade comercializada (em unidades). Os gráficos da função lucro e da função custo podem ser consultados na figura seguinte.



(a) Indique os intervalos de crescimento e decrescimento da função lucro.

(b) Determine a quantidade comercializada para que o lucro seja máximo e o lucro máximo correspondente.

(c) O *ponto crítico de vendas* é a denominação que se dá quando o total de receitas é igual ao total de custos. Determine e indique graficamente o(s) *ponto(s) crítico(s) de vendas*.

(d) Encontre a quantidade que tem de ser comercializada no sentido obter uma receita de 5 mil e quinhentos euros.

4. Com o objectivo de conhecer melhor o gosto dos habitantes de uma pequena cidade, foram abordadas trinta pessoas, ao acaso, e interrogadas sobre o animal de estimação que mais gostariam de ter em casa. As respostas obtidas foram registadas no seguinte quadro:

papagaio	cão	cão	gato	hamster	cobra
gato	coelho	papagaio	gato	gato	cão
macaco	tartagura	gato	macaco	cão	cão
gato	papagaio	gato	papagaio	gato	iguana
cão	gato	papagaio	papagaio	gato	cão

(a) Identifique a população e a amostra em estudo.

(b) Qual o atributo em análise?

(c) Trata-se de um atributo qualitativo ou quantitativo? Porquê?

(d) Construa o quadro de frequências para estes dados e indique qual o animal mais preferido dos inquiridos.

(e) Represente graficamente as frequências relativas através de um diagrama de barras.

5. Uma papelaria vende exclusivamente três jornais: o “Espesso”, o “Lua” e o “Privado”. Sabe-se que o “Privado” vende duas vezes mais jornais que o “Espesso”. Por sua vez, o “Espesso” vende três vezes mais jornais que o “Lua”. 30% dos jornais são reservados. Dos jornais “Lua” e “Espesso”, 80% e 50% são, respectivamente, as percentagens de reservas.

   (a) **Prove que** a probabilidade de, ao seleccionar aleatoriamente um jornal da papelaria, este ser o “Lua” é de 0.1.

   (b) Calcule a probabilidade de, ao seleccionar aleatoriamente um jornal da papelaria, este ser o “Espesso” e não estar reservado.

   (c) Calcule a probabilidade de, ao seleccionar aleatoriamente um jornal da papelaria, este ser o “Lua” sabendo que está reservado.

FORMULÁRIO

Probabilidades

Definição Clássica	Seja A um acontecimento do universo Ω $P(A) = \frac{\text{“nº de casos favoráveis a A”}}{\text{“nº de casos possíveis”}}$
Probabilidades Condicionadas	Sejam A e B acontecimentos do universo Ω $P(A \cap B) = P(A\|B)\, P(B)$
Teorema da Probabilidade Total	Sejam A, B_1, B_2 e B_3 acontecimentos do universo Ω onde $P(A) \neq 0$ e B_1, B_2 e B_3 definem uma partição de Ω. $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$
Teorema de Bayes	Sejam A e B acontecimentos do universo Ω com $P(A) \neq 0$ $P(B\|A) = \frac{P(A\|B)\, P(B)}{P(A)}$

Estatística Descritiva

Quadro de frequências

modalidades	frequência absoluta ordinária (n_i)	frequência relativa ordinária (f_i)
x_1	n_1	f_1
x_2	n_2	f_2
...	...	...
x_p	n_p	f_p
total	n	1

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{n} = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i$$

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \frac{n_i x_i^2}{n} - \overline{x}^2}$$

$$q_r = \begin{cases} \dfrac{x_{\left(\frac{r\times n}{4}\right)} + x_{\left(\frac{r\times n}{4}+1\right)}}{2}, & \frac{r\times n}{4} \in \mathbb{N} \\ x_{(m)}, & \frac{r\times n}{4} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

onde m é o menor inteiro $> \frac{r\times n}{4}$

$$I_q = q_3 - q_1$$

Cotações

Grupo I			**60**
Cada resposta certa		10	
Cada resposta errada, anulada ou não respondida		0	
Grupo II			**140**
1.		20	
2.		28	
a.	5		
b.	5		
c.	10		
d.	8		
3.		28	
a.	10		
b.	8		
c.	10		
4.		34	
a.	6		
b.	3		
c.	5		
d.	10		
e.	10		
5.		30	
a.	10		
b.	10		
c.	10		