



**Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade
para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos
Maiores de 23 Anos - 2011**

Prova escrita de conhecimentos específicos de MATEMÁTICA

Instruções gerais

1. A prova é constituída por **dois** grupos de questões, sendo o primeiro grupo de **resposta obrigatória** e o segundo grupo de **resposta aberta**;
2. A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos;
3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efectuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento;
4. Não utilize qualquer tipo de corrector. Se necessário risque ou peça uma troca de folha;
5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza electrónica (telemóvel, pda, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados);
6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte).
7. Admite-se que os candidatos utilizem nas respostas a este exame quer a antiga, quer a nova ortografia, sem nenhuma penalização, uma vez que ainda está em vigor o período de transição do novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Leiria, 4 de Junho de 2011

VERSÃO B

- Na sua folha de respostas escreva "**VERSÃO B**".
- A ausência desta indicação implica a anulação de todas as questões da escolha múltipla.

- Identifique claramente os grupos e as questões que responde.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo-saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "esferográfica-lápis" e de **corrector**.
- A prova inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova encontram-se na **página 9**.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão, são indicadas **quatro alternativas** de resposta, das quais só **uma está correcta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a questão será anulada.
- As respostas incorrectas terão cotação nula.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Considere um rectângulo cuja área é igual a 7 cm^2 .

Qual das seguintes expressões representa o perímetro do rectângulo, em função do comprimento, x , de um dos seus lados?

(A) $x + \frac{7}{x} \text{ cm.}$

(B) $2x + \frac{7}{x} \text{ cm.}$

(C) $2x + \frac{14}{x} \text{ cm.}$

(D) $2x + \frac{2x}{7} \text{ cm.}$

2. A recta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de uma certa função f , real de variável real, no ponto de abcissa 0.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

(A) $x^2 + x + 3.$

(B) $x^2 + x.$

(C) $x^2 - x.$

(D) $x^2 + 2x.$

3. Os parâmetros reais p e q , de modo que

$$\frac{x+p}{x^2-4x+3} = \frac{q}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

são:

(A) $p = 1$ e $q = 3$.

(B) $p = 1$ e $q = -1$.

(C) $p = 1$ e $q = 2$.

(D) $p = -1$ e $q = 1$.

4. Considere a função g , real de variável real, definida por

$$g(x) = \frac{2}{x} + \ln(4-x^2)$$

onde \ln designa o logaritmo de base e e e designa o número de Neper.

O domínio da função g é:

(A) $D_g =]-2, 2[\setminus \{0\}$.

(B) $D_g =]-e, e[$.

(C) $D_g =]-4, 4[\setminus \{0\}$.

(D) $D_g =]-\infty, 0[$.

5. O valor de $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{9-x^2}$ é igual a:

(A) $-\infty$.

(B) 0 .

(C) 1 .

(D) $+\infty$.

6. Seja α um ângulo agudo tal que $\sin(\alpha) = \frac{2}{3}$.

O valor da expressão $\cos(\alpha) + \tan(\alpha)$ é igual a:

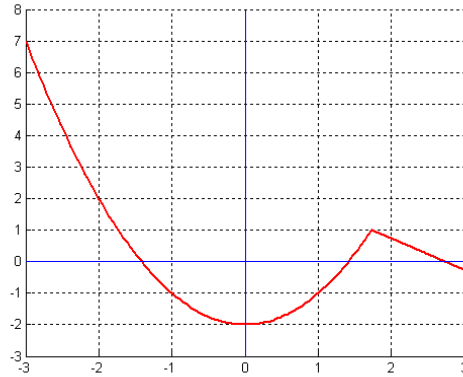
(A) $\frac{11\sqrt{5}}{5}$.

(B) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

(C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

(D) $\frac{11\sqrt{5}}{15}$.

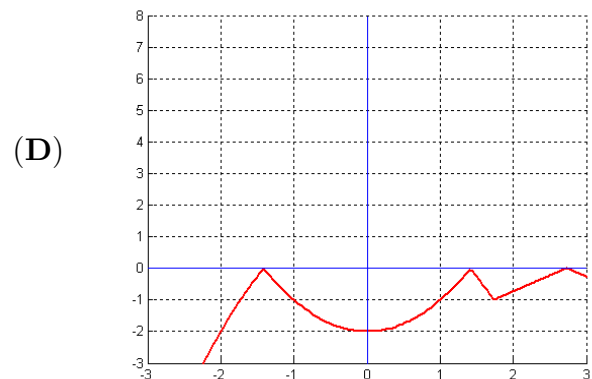
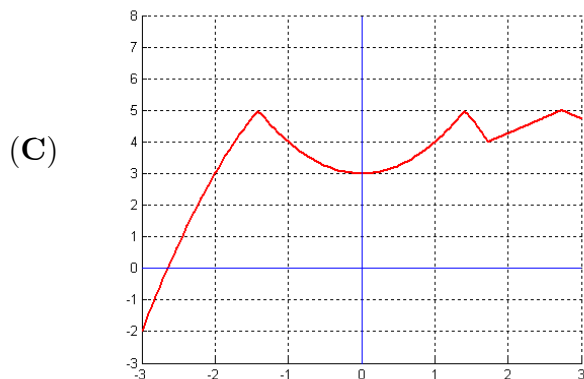
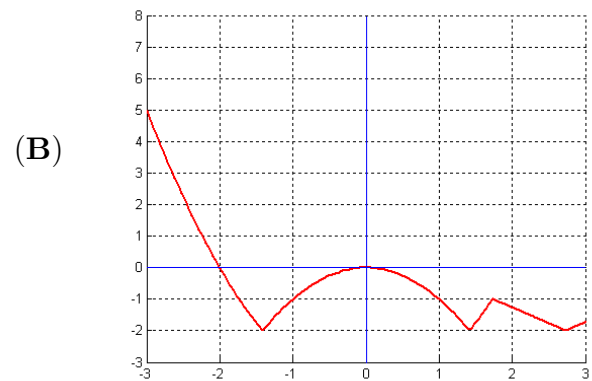
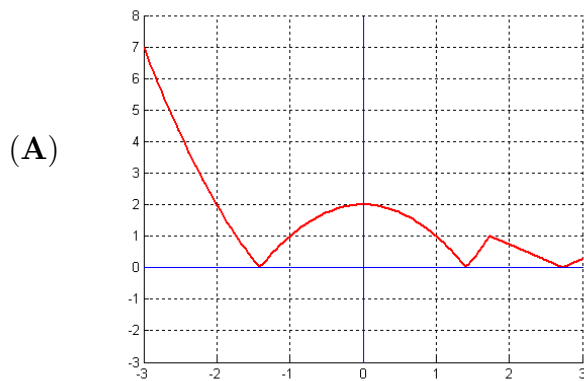
7. A figura seguinte representa, num referencial o.n. xOy , o gráfico de uma função h , real de variável real, no intervalo $[-3, 3]$.



Qual dos seguintes gráficos representa a função s , real de variável real, definida por

$$s(x) = 5 - |h(x)|$$

no intervalo $[-3, 3]$?



Grupo II

- Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, apresentando **todos os cálculos** que efectuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode recorrer à sua máquina de calcular para efectuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere as seguintes funções reais de variável real:

- a função cúbica f , definida por $f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + |k - 3|$, com $k \in \mathbb{R}$;
- a função racional g , definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 4}$.

- (a) Determine os domínios, D_f e D_g , das funções f e g , respectivamente.
- (b) Determine os valores do parâmetro real k , de modo que o resto da divisão de f por $x + 2$ seja 3.
- (c) Considere $k = 1$:
- i. Mostre que a função f é divisível por $x - 1$.
 - ii. Determine a decomposição em factores do 1º grau da função f .
 - iii. Determine os valores de x para os quais $g(x) \geq 0$.
 - iv. Mostre que
$$g'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x - 2)^2}, \quad \forall x \in D_g$$
onde g' designa a função derivada de g .
 - v. Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0.

2. Considere a função h , real de variável real, definida por

$$h(x) = \begin{cases} -3x^2 + k & \text{se } x \leq -2 \\ \frac{x-3}{2x+5} & \text{se } x > -2 \end{cases}.$$

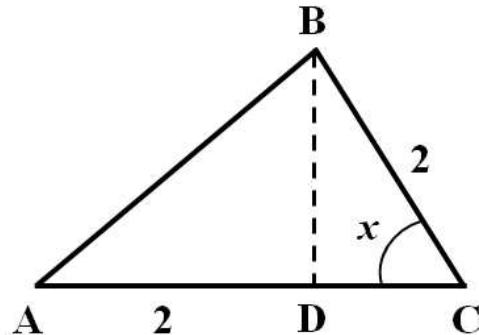
Determine:

- o parâmetro real k de modo que a função h seja contínua em todo o seu domínio.
- a partir da definição de derivada $h'(-10)$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
- a função derivada da função h .

3. A figura ao lado representa o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- x é a amplitude do ângulo BCA ;
- $[BD]$ é a altura relativa ao vértice B ;
- $\overline{AD} = \overline{BC} = 2$.



Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

- Prove que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, para qualquer $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, por

$$A(x) = 2 \sin(x) + \sin(2x).$$

- Determine o valor de x para o qual a área do triângulo é máxima.

4. O mestre Cuca preparou um pudim especial, para servir como sobremesa ao jantar.

Depois de o ter confeccionado, o mestre Cuca deixou o pudim a arrefecer na banca da cozinha.

Uma hora depois, colocou-o no frigorífico, para ficar bem frio.

Admita que a temperatura do pudim, em graus Celsius, t minutos depois de ter sido colocado na banca, é dada, para um certo valor de β , por

$$T(t) = \begin{cases} 20 + 80 \times 2^{-0.05t} & \text{se } 0 \leq t < 60 \\ 6 + \beta \times 2^{-0.05(t-60)} & \text{se } t \geq 60 \end{cases} .$$

Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

(a) Sabendo que a função T é contínua, mostre que $\beta = 24$.

(b) Quanto tempo deverá o pudim estar no frigorífico para que a sua temperatura fique igual a 12°C ?

Apresente o resultado em minutos.

FORMULÁRIO

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Trigonometria

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$$

$$\sin(2 \cdot a) = 2 \cdot \sin(a) \cdot \cos(a)$$

$$\cos(2 \cdot a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

COTAÇÕES

| | |
|---|----------------|
| Grupo I | 70 |
| Cada resposta certa | 10 |
| Cada resposta errada, anulada ou não respondida | 0 |
| Grupo II | 130 |
| 1. | 50 |
| (a) | 4 |
| (b) | 8 |
| (c) | 38 |
| i. | 4 |
| ii. | 8 |
| iii. | 10 |
| iv. | 10 |
| v. | 6 |
| 2. | 40 |
| (a) | 10 |
| (b) | 8 |
| (c) | 8 |
| (d) | 14 |
| 3. | 20 |
| (a) | 10 |
| (b) | 10 |
| 4. | 20 |
| (a) | 10 |
| (b) | 10 |
| Total | 200 |