Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos - 2011

Prova escrita de conhecimentos específicos de MATEMÁTICA

Instruções gerais

1. A prova é constituída por **dois** grupos de questões, sendo o primeiro grupo de **resposta obrigatória** e o segundo grupo de **resposta aberta**;
2. A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos;
3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efectuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento;
4. Não utilize qualquer tipo de corrector. Se necessário risque ou peça uma troca de folha;
5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza electrónica (telemóvel, pda, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados);
6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte).
7. Admite-se que os candidatos utilizem nas respostas a este exame quer a antiga, quer a nova ortografia, sem nenhuma penalização, uma vez que ainda está em vigor o período de transição do novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Leiria, 4 de Junho de 2011

VERSÃO A

- Na sua folha de respostas escreva "**VERSÃO A**".
- **A ausência desta indicação implica a anulação de todas as questões da escolha múltipla**.

- **Identifique claramente os grupos e as questões que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo-saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica-lápis**" e de **corrector**.
- A prova inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova encontram-se na **página 9**.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão, são indicadas **quatro alternativas** de resposta, das quais só **uma está correcta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a questão será anulada.
- As respostas incorrectas terão cotação nula.
- **Não apresente cálculos**, **nem justificações**.

1. Considere um rectângulo cuja área é igual a 7 cm^2.

   Qual das seguintes expressões representa o perímetro do rectângulo, em função do comprimento, x, de um dos seus lados?

   (**A**) $2x + \dfrac{7}{x}$ cm. (**B**) $2x + \dfrac{14}{x}$ cm.

   (**C**) $x + \dfrac{7}{x}$ cm. (**D**) $2x + \dfrac{2x}{7}$ cm.

2. A recta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de uma certa função f, real de variável real, no ponto de abcissa 0.

   Qual das seguintes expressões pode definir a função f?

   (**A**) $x^2 + x$. (**B**) $x^2 + x + 3$.

   (**C**) $x^2 + 2x$. (**D**) $x^2 - x$.

3. Os parâmetros reais p e q, de modo que

$$\frac{x+p}{x^2-4x+3}=\frac{q}{x-1}+\frac{2}{x-3}$$

são:

(**A**) $p=1$ e $q=2$.

(**B**) $p=1$ e $q=-1$.

(**C**) $p=-1$ e $q=1$.

(**D**) $p=1$ e $q=3$.

4. Considere a função g, real de variável real, definida por

$$g(x)=\frac{2}{x}+\ln\left(4-x^2\right)$$

onde ln designa o logaritmo de base e e e designa o número de Neper.

O domínio da função g é:

(**A**) $D_g=]-4,4[\setminus\{0\}$.

(**B**) $D_g=]-e,e[$.

(**C**) $D_g=]-\infty,0[$.

(**D**) $D_g=]-2,2[\setminus\{0\}$.

5. O valor de $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{9-x^2}$ é igual a:

(**A**) 0.

(**B**) 1.

(**C**) $+\infty$.

(**D**) $-\infty$.

6. Seja α um ângulo agudo tal que $\sin(\alpha)=\frac{2}{3}$.

O valor da expressão $\cos(\alpha)+\tan(\alpha)$ é igual a:

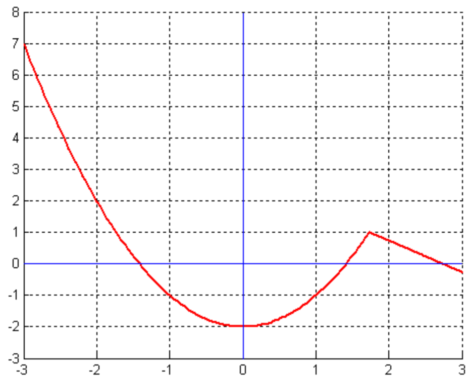
(**A**) $\frac{11\sqrt{5}}{15}$.

(**B**) $\frac{11\sqrt{5}}{5}$.

(**C**) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

(**D**) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

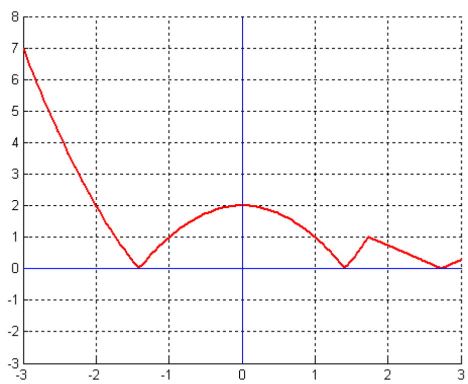
7. A figura seguinte representa, num referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função h, real de variável real, no intervalo $[-3, 3]$.

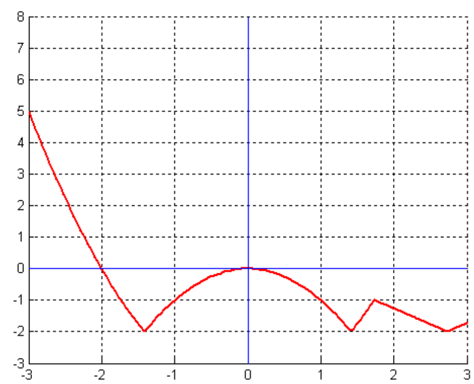


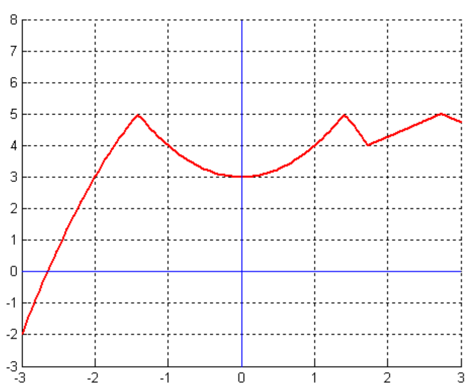
Qual dos seguintes gráficos representa a função s, real de variável real, definida por

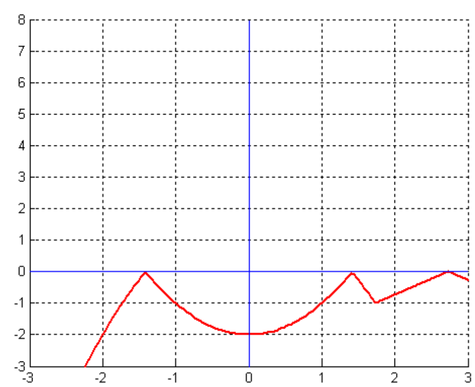
$$s(x) = 5 - |h(x)|$$

no intervalo $[-3, 3]$?

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

Grupo II

• Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, apresentando **todos os cálculos** que efectuar e **todas as justificações** necessárias.

• Pode recorrer à sua máquina de calcular para efectuar cálculos e obter representações gráficas de funções.

• **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere as seguintes funções reais de variável real:

   • a função cúbica f, definida por $f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + |k-3|$, com $k \in \mathbb{R}$;

   • a função racional g, definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2-4}$.

   (a) Determine os domínios, D_f e D_g, das funções f e g, respectivamente.

   (b) Determine os valores do parâmetro real k, de modo que o resto da divisão de f por $x+2$ seja 3.

   (c) Considere $k = 1$:

      i. Mostre que a função f é divisível por $x - 1$.

      ii. Determine a decomposição em factores do 1^o grau da função f.

      iii. Determine os valores de x para os quais $g(x) \geq 0$.

      iv. Mostre que

      $$g'(x) = \frac{-x^2+4x-1}{(x-2)^2}, \qquad \forall x \in D_g$$

      onde g' designa a função derivada de g.

      v. Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0.

2. Considere a função h, real de variável real, definida por

$$h(x) = \begin{cases} -3x^2 + k & se \quad x \leq -2 \\ \dfrac{x-3}{2x+5} & se \quad x > -2 \end{cases}.$$

Determine:

(a) o parâmetro real k de modo que a função h seja contínua em todo o seu domínio.

(b) a partir da definição de derivada $h'(-10)$.

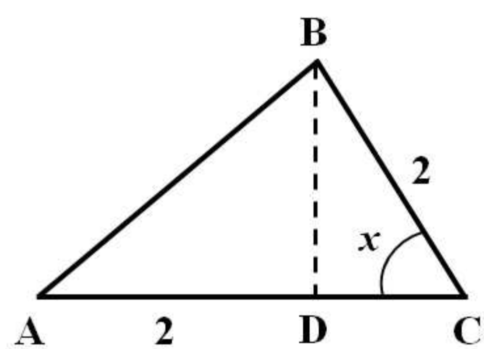
(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

(d) a função derivada da função h.

3. A figura ao lado representa o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- x é a amplitude do ângulo BCA;
- $[BD]$ é a altura relativa ao vértice B;
- $\overline{AD} = \overline{BC} = 2$.



Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

(a) Prove que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, para qualquer $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, por

$$A(x) = 2\sin(x) + \sin(2x).$$

(b) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo é máxima.

4. O mestre Cuca preparou um pudim especial, para servir como sobremesa ao jantar.

Depois de o ter confeccionado, o mestre Cuca deixou o pudim a arrefecer na banca da cozinha.

Uma hora depois, colocou-o no frigorífico, para ficar bem frio.

Admita que a temperatura do pudim, em graus Celsius, t minutos depois de ter sido colocado na banca, é dada, para um certo valor de β, por

$$T(t) = \begin{cases} 20 + 80 \times 2^{-0.05t} & se \quad 0 \leq t < 60 \\ 6 + \beta \times 2^{-0.05(t-60)} & se \quad t \geq 60 \end{cases}.$$

Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

(a) Sabendo que a função T é contínua, mostre que $\beta = 24$.

(b) Quanto tempo deverá o pudim estar no frigorífico para que a sua temperatura fique igual a 12^oC?

Apresente o resultado em minutos.

FORMULÁRIO

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a(u))' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Trigonometria

$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$

$\tan(a) = \dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}$

$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\sin(2 \cdot a) = 2 \cdot \sin(a) \cdot \cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

$\cos(2 \cdot a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

COTAÇÕES

Grupo I		**70**
Cada resposta certa	10	
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0	
Grupo II		**130**
1.	50	
(a)	4	
(b)	8	
(c)	38	
i.	4	
ii.	8	
iii.	10	
iv.	10	
v.	6	
2.	40	
(a)	10	
(b)	8	
(c)	8	
(d)	14	
3.	20	
(a)	10	
(b)	10	
4.	20	
(a)	10	
(b)	10	
Total		**200**