Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos - 2013

Prova escrita de conhecimentos específicos de MATEMÁTICA

Instruções gerais

1. A prova é constituída por **dois** grupos de questões, sendo o primeiro grupo de **resposta obrigatória** e o segundo grupo de **resposta aberta** (mais informações nas páginas 1 e 2 do enunciado);
2. A duração da prova é de **2 horas**, estando prevista uma **tolerância de 30 minutos**;
3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efetuar os rascunhos, as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento;
4. Não utilize qualquer tipo de corretor. Se necessário risque ou peça uma troca de folha;
5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza eletrónica (telemóvel, pda, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados), excepto máquina de calcular para realizar cálculos e obter representações gráficas de funções;
6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte);
7. Todas as respostas de opção, correspondência ou de assinalar verdadeiro ou falso devem ser transcritas para a folha de prova;
8. A cotação de cada uma das questões da prova encontra-se na última página.

Leiria, 1 de junho de 2013

Prova Escrita de MATEMÁTICA

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova inclui um **formulário** na **página 7**.
- As **cotações** da prova encontram-se na **página 8**.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta, das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua resposta será considerada incorreta.
- As respostas incorretas terão cotação nula.
- **Não apresente cálculos**, **nem justificações**.

1. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = 4^{2x+1} - 5$.

   O ponto que pertence ao gráfico da função f é o ponto de coordenadas:

   (**A**) $\left(-\frac{1}{4}, 3\right)$. (**B**) $\left(-\frac{1}{4}, -3\right)$.

   (**C**) $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$. (**D**) $\left(\frac{1}{4}, -2\right)$.

2. Os parâmetros reais A e B, que verificam $\frac{3x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ são:

   (**A**) $A = 3$ e $B = 1$. (**B**) $A = 2$ e $B = 1$.

   (**C**) $A = 1$ e $B = 1$. (**D**) $A = 1$ e $B = 2$.

3. Seja α um ângulo tal que $\alpha \in [0, \pi]$ e $\tan(\alpha) = -\sqrt{8}$, onde tan designa a função tangente.

   O valor da expressão $1 - 2\cos^2(\alpha) + \cos(\alpha)$ é igual a:

   (**A**) $\frac{1}{3}$. (**B**) $\frac{2}{5}$.

   (**C**) $\frac{4}{9}$. (**D**) $-\frac{1}{3}$.

4. Considere a função g, real de variável real, definida por

$$g(x) = \log_2\left(2x^2 - 2x\right)$$

onde $\log_2$ designa o logaritmo de base 2. Os zeros da função g são:

(**A**) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

(**B**) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

(**C**) $1-\sqrt{3}$ e $1+\sqrt{3}$.

(**D**) $2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$.

5. A reta de equação reduzida $y = 24x - 48$ é tangente ao gráfico da função h, real de variável real, no ponto de abcissa 4.

Qual a expressão analítica que pode definir a função h?

(**A**) $h(x) = -4x^2$.

(**B**) $h(x) = 2x^2$.

(**C**) $h(x) = 3x^2$.

(**D**) $h(x) = 4x^2$.

6. Considere a função φ, real de variável real, tal que $\varphi'(2) = 6$.

O valor de

$$\lim_{x\to 2} \frac{\varphi(x) - \varphi(2)}{x^2 - 4}$$

é igual a:

(**A**) $\dfrac{3}{2}$.

(**B**) $\dfrac{3}{4}$.

(**C**) $\dfrac{5}{4}$.

(**D**) 2.

7. Considere a função ψ, real de variável real, cuja sua função derivada é a função definida por

$$\psi'(x) = e^x\left(x^2 + x + 1\right).$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(**A**) ψ é estritamente decrescente.

(**B**) ψ é estritamente crescente.

(**C**) ψ tem um máximo absoluto.

(**D**) ψ tem um mínimo absoluto.

Grupo II

- Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode recorrer à sua máquina de calcular para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere as seguintes funções reais de variável real:

   - a função cúbica f, definida por $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$;
   - a função quadrática g, definida por $g(x) = x^2 - 1$.

   (a) Mostre que a função f é divisível por $x - 1$.

   (b) Determine a decomposição em fatores do 1^o grau da função f.

   (c) Determine os polinómios $Q(x) = ax + b$ e $R(x) = c$ tais que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{x+1}$.

   (d) Determine a abcissa do ponto de inflexão da função f.

2. Considere a função h, real de variável real, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} & \text{se} \quad x > 2 \\ 2x & \text{se} \quad x \leq 2 \end{cases}.$$

   (a) Determine, caso existam, $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

   (b) Estude a continuidade da função h em todo o seu domínio.

   (c) Mostre que

$$h'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}, \qquad \forall x \in \left]2, +\infty\right[.$$

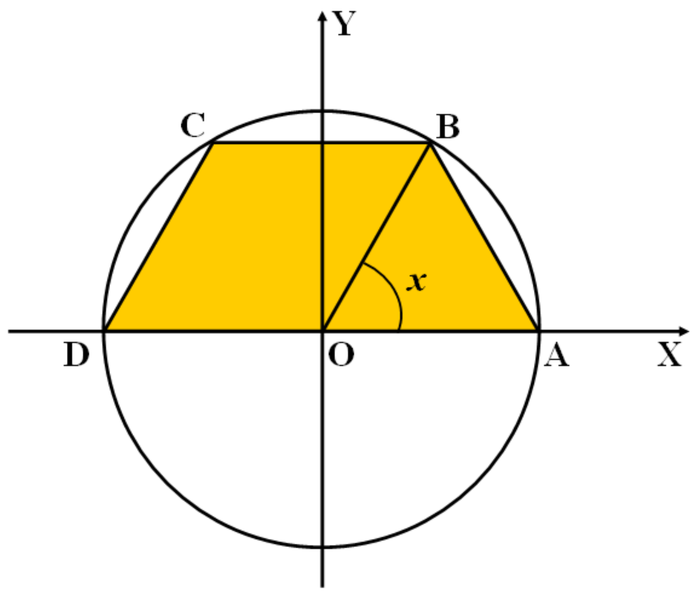
   (d) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função h no ponto $(4, h(4))$.

3. Na figura abaixo está representado, num referencial o.n. XOY, o círculo trigonométrico.

Os pontos A, B, C e D, pertencem à circunferência que limita o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- $[ABCD]$ é um trapézio;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, sendo $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- os pontos A e D têm coordenadas, respetivamente, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.



Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os três itens seguintes.

(a) Prove que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada, para qualquer $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, por

$$A(x) = \sin(x) + \sin(x)\cos(x).$$

(b) Determine $A(\theta)$ sabendo que

$$\tan(15\pi - \theta) = \frac{3}{4} \qquad \text{e} \qquad \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[,$$

onde tan designa a função tangente.

(c) Determine o valor de x para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é máxima e indique o valor da área.

4. Numa certa cidade, com 17500 habitantes, surgiu uma epidemia.

   Sabe-se que o número de pessoas doentes, **em centenas**, t semanas após o estudo da epidemia, é dado, aproximadamente, pela função P, real de variável real, definida por

   $$P(t) = 3.5 \times 2^{0.6t - 0.07t^2} \qquad \text{com} \qquad t \geq 0.$$

   Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os três itens seguintes.

   Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos e sempre que proceder a arredondamentos, use **duas casas decimais**.

   (a) Determine o número de pessoas que, nessa cidade, estava doente quando se deu o início do estudo da epidemia.

   (b) A epidemia foi considerada extinta quando a percentagem de doentes atingiu um valor menor ou igual a 1% dos habitantes da cidade.

   Quanto tempo depois do início do estudo é que isso aconteceu?

   (c) Indique, aproximadamente, qual foi o número máximo de habitantes doentes.

FIM da Prova

FORMULÁRIO

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Trigonometria

$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$

$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$

$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\sin(2 \cdot a) = 2 \cdot \sin(a) \cdot \cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

$\cos(2 \cdot a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

Área de figuras planas

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

COTAÇÕES

Grupo I		**70**
Cada resposta certa	10	
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0	
Grupo II		**130**
1.	30	
(a)	4	
(b)	8	
(c)	10	
(d)	8	
2.	35	
(a)	12	
(b)	8	
(c)	10	
(d)	5	
3.	35	
(a)	12	
(b)	9	
(c)	14	
4.	30	
(a)	5	
(b)	13	
(c)	12	
Total		**200**