# VERSÃO A

- Na sua folha de respostas escreva "**VERSÃO A**".
- **A ausência desta indicação implica a anulação de todas as questões da escolha múltipla**.

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova encontram-se na **página 9**.

# Grupo I

- As sete questões deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta, das quais só **uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a questão será anulada.
- As respostas incorretas terão cotação nula.
- **Não apresente cálculos**, **nem justificações**.

1. Os parâmetros reais $A$ e $B$, que verificam $\dfrac{Ax-13}{x^2-3x-4} = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{B}{x-4}$ são:

   (**A**) $A=1$ e $B=-2$.   (**B**) $A=-1$ e $B=2$.

   (**C**) $A=2$ e $B=-1$.   (**D**) $A=2$ e $B=1$.

2. Considere as funções $f$ e $g$, reais de variável real, tais que

$$f(x) = x+2 \qquad \text{e} \qquad (g \circ f)(x) = 2x+3.$$

   A função $g$ é definida por:

   (**A**) $g(x) = 2x-1$.   (**B**) $g(x) = 2x+1$.

   (**C**) $g(x) = 2x-3$.   (**D**) $g(x) = 2x+3$.

3. Considere a função $h$, real de variável real, definida por $h(x) = 5 - 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

   O contradomínio da função $h$ é:

   (**A**) $D'_h = [-1,1]$.   (**B**) $D'_h = [-3,7]$.

   (**C**) $D'_h = [2,5]$.   (**D**) $D'_h = [3,7]$.

4. Considere a função $f$, real de variável real, definida por $f(x) = \ln(|x-2|-3)$ onde ln designa o logaritmo de base $e$ e $e$ designa o número de Neper.

O domínio da função $f$ é:

(**A**) $D_f = ]-\infty, 3[$.

(**B**) $D_f = ]-\infty, -5[ \cup ]-1, +\infty[$.

(**C**) $D_f = ]-1, 5[$.

(**D**) $D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]5, +\infty[$.

5. Considere as funções $g$ e $h$, reais de variável real, definidas por

$$g(x) = -x^3 + 3x^2 + 6 \qquad \text{e} \qquad h(x) = e^{2x+2}$$

onde $e$ designa o número de Neper.

O valor de $(g \cdot h)'(-1)$ é igual a:

(**A**) 11.

(**B**) $-18$.

(**C**) 10.

(**D**) Nenhum dos valores anteriores.

6. Para cada par de valores reais atribuídos a $\alpha$ e a $\beta$, a expressão seguinte define uma função $\varphi$, real de variável real, dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{3-\sqrt{x}}{x-9} & \text{se} \quad 0 < x < 9 \\ \beta & \text{se} \quad x \geq 9 \end{cases}.$$

Para que par de valores reais $\alpha$ e $\beta$, a função $\varphi$ é contínua em todo o seu domínio?

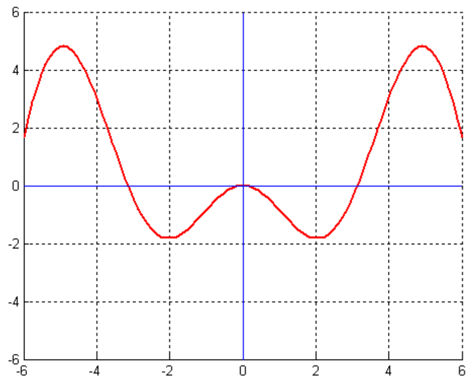
(**A**) $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ e $\beta = \dfrac{1}{6}$.

(**B**) $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ e $\beta = -\dfrac{1}{6}$.

(**C**) $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ e $\beta = -\dfrac{1}{3}$.

(**D**) $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ e $\beta = \dfrac{1}{3}$.

7. A figura seguinte representa, num referencial o.n. $XOY$, o gráfico de uma função $f$, real de variável real, no intervalo $[-6, 6]$.

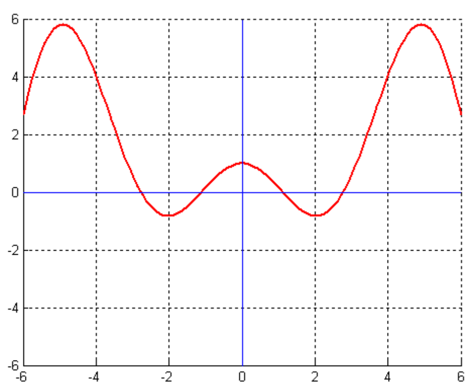


Qual dos seguintes gráficos representa a função $g$, real de variável real, definida por

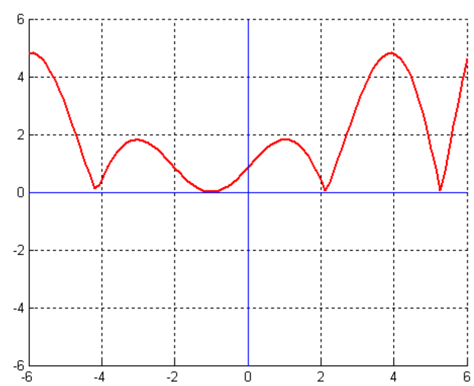
$$g(x) = |f(x+1)| + 1$$

no intervalo $[-6, 6]$?

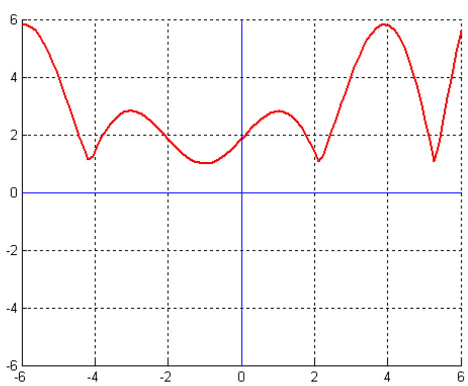
(**A**)



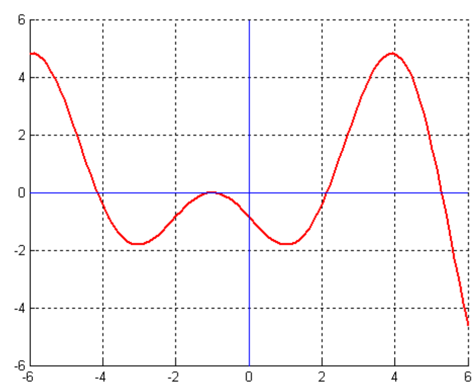
(**B**)



(**C**)



(**D**)



# Grupo II

- Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode recorrer à sua máquina de calcular para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere as seguintes funções reais de variável real:

   - a função cúbica $f$, definida por $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 20$;
   - a função quadrática $g$, definida por $g(x) = -x^2 + x + 2$.

   (a) Mostre que a função $f$ é divisível por $x + 2$.

   (b) Determine a decomposição em fatores do 1º grau da função $f$.

   (c) Determine o valor dos parâmetros reais $a$, $b$ e $c$, tais que $(ax + 5)\, g(x) + bx + c = f(x)$.

   (d) Determine, sob a forma de intervalos de números reais, o conjunto dos valores de $x$ para os quais a função $f$ é estritamente decrescente.

2. Considere a função $h$, real de variável real, definida por $h(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 2 \\ \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 3} & \text{se } x > 2 \end{cases}$.

   (a) Determine, caso existam, $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

   (b) Determine o conjunto solução da inequação $h(x) > 1$.

   (c) Mostre que
   $$h'(x) = \frac{x^2 + 6x - 15}{(x+3)^2}, \qquad \forall x \in \left]2, +\infty\right[.$$

   (d) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função $h$ no ponto de abcissa 3.

3. Na figura abaixo está representada, num referencial o.n. $XOY$, a circunferência de centro $O$ e raio 5.

Os pontos $A$ e $B$, são, respetivamente, os pontos de interseção da circunferência com os semi eixos positivos $OX$ e $OY$.

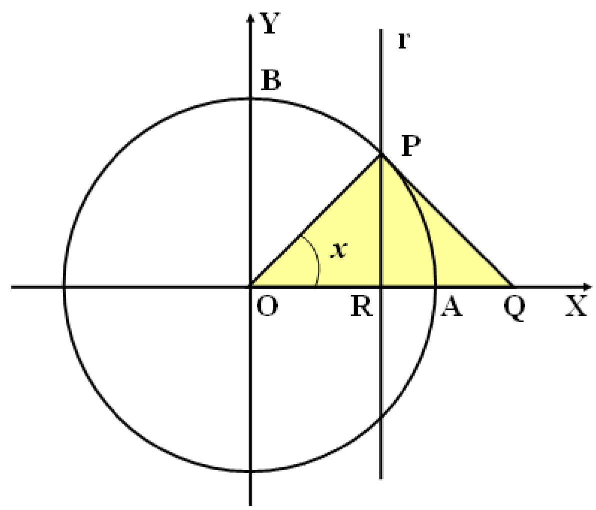
Considere um ponto $P$ que se desloca ao longo do arco $AB$, nunca coincidindo com o ponto $A$, nem com o ponto $B$.

Para cada posição do ponto $P$, sabe-se que:

- o ponto $Q \neq O$ é o ponto do eixo $OX$ tal que $\overline{PO} = \overline{PQ}$;

- a reta $r$ é a mediatriz do segmento $[OQ]$;

- o ponto $R$ é o ponto de interseção da reta $r$ com o eixo $OX$.




Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os itens seguintes.

(a) Prove que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada, para qualquer $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, por

$$A(x) = 25 \sin(x) \cos(x).$$

(b) Determine o valor real de $x$, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, para o qual se tem

$$A(x) = 25 \cos^2(x).$$

(c) Seja $\beta$ um número real pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e tal que $A(\beta) = 5$.

Determine o valor da expressão

$$[\sin(\beta) + \cos(\beta)]^2.$$

(d) Determine o valor real de $x$, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, para o qual a área do triângulo $[OPQ]$ é máxima e indique o valor da área.

4. Em determinada espécie de árvores destinadas às indústrias da madeira, o diâmetro médio $d$ do tronco, em centímetros, está relacionado com o número $T$ de anos decorridos após a plantação, através da expressão

$$T(d) = -4.6 + 4.3 \log_2(d)$$

onde $\log_2$ designa o logaritmo de base 2.

(a) Determine o diâmetro médio das árvores na altura da plantação.

(Apresente o resultado com aproximação às décimas do centímetro.)

(b) Verifique que, para qualquer valor de $d$, a diferença

$$T(2d) - T(d)$$

é constante e interprete o seu valor no contexto da situação descrita.

(c) Admitindo que as árvores são cortadas quando o diâmetro médio do tronco atinge os 64 centímetros, determine o número de anos, com aproximação às unidades, que decorre entre a plantação e o corte das árvores.

**FORMULÁRIO**

**Regras de derivação**

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a(u))' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

**Trigonometria**

$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$

$\tan(a) = \dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}$

$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\sin(2 \cdot a) = 2 \cdot \sin(a) \cdot \cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

$\cos(2 \cdot a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

**COTAÇÕES**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Grupo I** | | | **70** |
| Cada resposta certa | | 10 | |
| Cada resposta errada, anulada ou não respondida | | 0 | |
| **Grupo II** | | | **130** |
| **1.** | | 30 | |
| **(a)** | 4 | | |
| **(b)** | 8 | | |
| **(c)** | 8 | | |
| **(d)** | 10 | | |
| **2.** | | 35 | |
| **(a)** | 10 | | |
| **(b)** | 12 | | |
| **(c)** | 8 | | |
| **(d)** | 5 | | |
| **3.** | | 40 | |
| **(a)** | 10 | | |
| **(b)** | 8 | | |
| **(c)** | 8 | | |
| **(d)** | 14 | | |
| **4.** | | 25 | |
| **(a)** | 10 | | |
| **(b)** | 7 | | |
| **(c)** | 8 | | |
| **Total** | | | **200** |