Prova Escrita de MATEMÁTICA

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova escrita inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova escrita encontram-se na **página 9**.

Grupo I

- As **sete questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta, das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos e nem justificações**.

1. Os parâmetros reais A e B que verificam $\dfrac{x-7}{x^2-2x-3} = \dfrac{2A}{x+1} + \dfrac{B}{x-3}$ são:

   (**A**) $A=-1$ e $B=-1$. (**B**) $A=-1$ e $B=1$.

   (**C**) $A=1$ e $B=-1$. (**D**) $A=1$ e $B=1$.

2. Sejam a, b e c três números reais tais que $\log_a(b) = c$, onde log designa a função logarítmo.

   O valor de $\log_a\left(\dfrac{b^c}{a}\right)$ é:

   (**A**) $-1-c^2$. (**B**) $1-c^2$.

   (**C**) $1+c^2$. (**D**) $-1+c^2$.

3. Considere as funções f e g, reais de variável real, definidas por

   $$f(x) = \sqrt{9-x^2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{x-1}.$$

   O domínio da função φ, real de variável real, definida por $\varphi(x) = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ é:

   (**A**) $]1,3[$. (**B**) $]1,3]$.

   (**C**) $[1,3[$. (**D**) $[1,3]$.

4. Seja α a amplitude de um ângulo do 3.º quadrante e tal que $\cos(\alpha) = -\dfrac{4}{5}$,

onde cos designa a função cosseno.

O valor da expressão

$$\frac{\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)}{\cot(\alpha)}$$

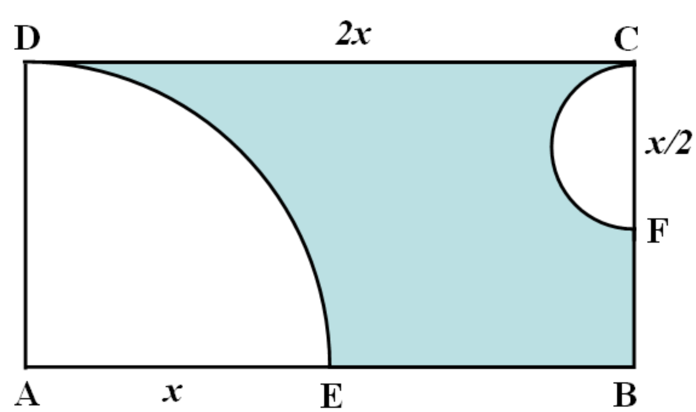
onde sin designa a função seno e cot designa a função cotangente, é igual a:

(**A**) $\dfrac{3}{100}$. (**B**) $\dfrac{4}{75}$.

(**C**) $\dfrac{93}{100}$. (**D**) $\dfrac{124}{75}$.

5. Na figura estão representados, num referencial o.n. XOY:

- o rectângulo $[ABCD]$ cujas medidas dos lados são $2x$ e x, respetivamente;
- o arco de circunferência DE de centro em A e raio x;
- o arco de circunferência CF de centro em $\dfrac{[CF]}{2}$ e diâmetro $\dfrac{x}{2}$.



A área da região sombreada, em função do comprimento x do lado do rectângulo é:

(**A**) $A(x) = \left(2 - \dfrac{5\pi}{4}\right)x^2$. (**B**) $A(x) = \left(2 - \dfrac{3\pi}{8}\right)x^2$.

(**C**) $A(x) = \left(2 - \dfrac{17\pi}{16}\right)x^2$. (**D**) $A(x) = \left(2 - \dfrac{9\pi}{32}\right)x^2$.

6. Considere a função h, real de variável real, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{4 - x^2} & se \quad x < 2 \\ \\ \alpha x + \beta & se \quad x \geq 2 \end{cases}$$

onde α e β são parâmetros reais.

Uma relação entre os parâmetros reais α e β de modo que a função h seja contínua no ponto de abcissa 2 é:

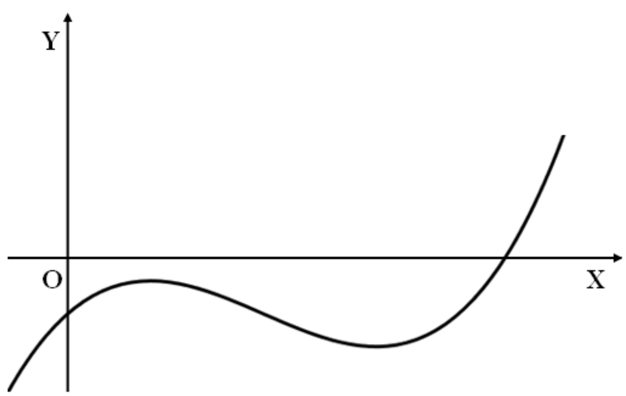
(**A**) $2\alpha + \beta = 4.$

(**B**) $2\alpha + \dfrac{\beta}{3} = 1.$

(**C**) $2\alpha + \beta = \dfrac{1}{4}.$

(**D**) $\alpha + 2\beta = \dfrac{1}{4}.$

7. Na figura está representado, num referencial o.n. XOY, parte do gráfico de uma função ψ, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$.



Sejam ψ' e ψ'', a primeira e a segunda derivadas de ψ, respetivamente.

Admita que estas duas funções também têm domínio $\mathbb{R}$.

Qual das expressões é verdadeira?

(**A**) $\psi(0) - \psi'(0) > 0.$

(**B**) $\psi'(0) \times \psi''(0) > 0.$

(**C**) $\psi'(0) - \psi''(0) > 0.$

(**D**) $\psi(0) + \psi''(0) > 0.$

Grupo II

• Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.

• Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.

• **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere as funções reais de variável real:

   - a função cúbica f, definida por $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 22x - 8$;
   - a função quadrática g, definida por $g(x) = x^2 + x - 12$.

   (a) Usando a regra de Ruffini, demonstre que toda a função quadrática definida por

   $$x^2 + (a+b)x + ab$$

   com a e b valores reais, é divisível por $x + a$ e por $x + b$.

   (b) Usando a alínea anterior, determine a decomposição em fatores do 1.^{o} grau da função g.

   (c) Mostre que o resto da divisão $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é o polinómio $R(x) = x + 4$.

   (d) Estude o sinal da função racional definida por $h(x) = \dfrac{R(x)}{g(x)}$, onde R é o polinómio da alínea anterior.

   (e) Determine o conjunto solução da condição $f(x) > (2x-1)\,g(x)$.

2. A Ana serviu um chá à sua amiga Adriana.

   Considere que a temperatura T do chá, em graus Celsius, t minutos após ser servido é dada por

   $$T(t) = \frac{17t + 400}{t + 5} \qquad \text{com} \qquad t \geq 0.$$

   (a) A que temperatura foi servido o chá?

   (b) Qual a temperatura do chá um quarto de hora após ter sido servido?

   (c) Quando a Adriana bebeu o chá, este estava à temperatura de 27.5 ^{o}C.

   Quanto tempo decorreu desde o momento em que o chá foi servido e a Adriana o bebeu?

   (d) Determine a assíntota horizontal do gráfico da função T e indique o seu significado no contexto do problema apresentado.

3. Considere a função $\mathcal{F}$, real de variável real, definida por

   $$\mathcal{F}(x) = \frac{e^x}{x - 1}$$

   onde e representa do número de Neper.

   Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os seguintes itens.

   (a) Determine o domínio $D_{\mathcal{F}}$ da função $\mathcal{F}$.

   (b) Demonstre que

   $$\mathcal{F}'(x) = \frac{e^x (x - 2)}{(x - 1)^2} \qquad \text{com} \qquad x \in D_{\mathcal{F}}$$

   onde $\mathcal{F}'$ representa a primeira derivada da função $\mathcal{F}$.

   (c) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função $\mathcal{F}$ no ponto $(0, \mathcal{F}(0))$.

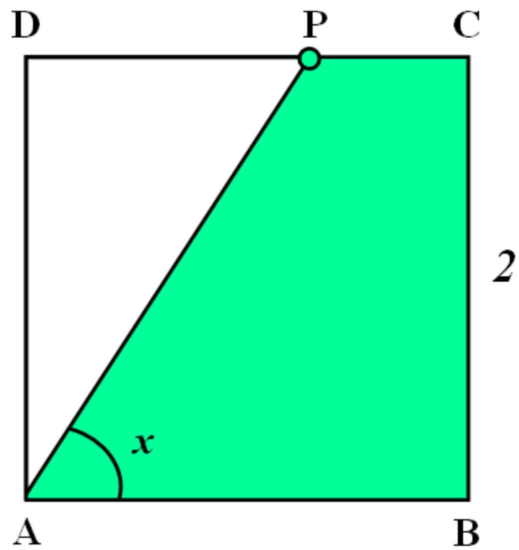
   (d) Resolva a equação

   $$\ln(\mathcal{F}(x)) = x$$

   onde ln representa o logarítmo de base e e e representa do número de Neper.

   (e) Estude a função $\mathcal{F}$ quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

4. Na figura está representado, num referencial o.n. XOY, o quadrado $[ABCD]$ de lado 2.



Considere que um ponto P se desloca ao longo do lado $[CD]$, nunca coincidindo com o ponto C, nem com o ponto D.

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAP.

Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os seguintes itens.

(a) Demonstre que a área da região sombreada, para qualquer $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, é dada por

$$A(x) = 4 - \frac{2}{\tan(x)}$$

onde tan representa a função tangente.

(b) Determine o valor de x para o qual a área da região sombreada é igual a $\frac{12 - 2\sqrt{3}}{3}$ unidades quadradas.

(c) Para um certo valor de x, sabe-se que

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{15}{17}$$

onde cos representa a função cosseno.

Determine, para esse valor de x, a área da região sombreada.

FIM da Prova Escrita

FORMULÁRIO

Regras de Derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Trigonometria

$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$

$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$

$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\sin(2 \cdot a) = 2 \cdot \sin(a) \cdot \cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

$\cos(2 \cdot a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

Área de Figuras Planas

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono Regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Setor Circular: $\frac{\alpha \times r^2}{2}$ (α − amplitude em radianos do ângulo ao centro, r − raio)

COTAÇÕES

Grupo I		**70**
Cada resposta certa	10	
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0	
Grupo II		**130**
1.	30	
(a)	6	
(b)	6	
(c)	6	
(d)	6	
(e)	6	
2.	30	
(a)	5	
(b)	5	
(c)	10	
(d)	10	
3.	40	
(a)	4	
(b)	12	
(c)	6	
(d)	9	
(e)	9	
4.	30	
(a)	10	
(b)	10	
(c)	10	
Total		**200**