Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos – 2017

Prova de Avaliação de MATEMÁTICA

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova de avaliação tem **8 páginas**.
- A prova de avaliação inclui um **formulário** na **página 7**.
- As **cotações** da prova de avaliação encontram-se na **página 8**.

Grupo I

- As **oito questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos nem justificações**.

1. Considere o polinómio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b$, onde a e b são constantes reais.

   Os valores das constantes reais a e b para os quais a divisão do polinómio P pelo polinómio $Q(x) = x^2 - 5x + 1$ é exata são:

   (**A**) $a = -10$ e $b = -2$.
   (**B**) $a = -10$ e $b = 2$.
   (**C**) $a = 2$ e $b = -10$.
   (**D**) $a = -2$ e $b = -10$.

2. Considere a função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$ e de contradomínio $[-4, 1]$.

   Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = |f(x) + 1|$.

   Qual é o contradomínio de g?

   (**A**) $[-2, 3]$.
   (**B**) $[0, 2]$.
   (**C**) $[0, 3]$.
   (**D**) $[0, 4]$.

3. O valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n$ é:

   (**A**) e^{-3}.
   (**B**) 1.
   (**C**) e^2.
   (**D**) e^3.

4. Considere o ângulo α do primeiro quadrante tal que $2\cos(\alpha) = 3\tan(\alpha)$, onde cos designa a função cosseno e tan designa a função tangente.

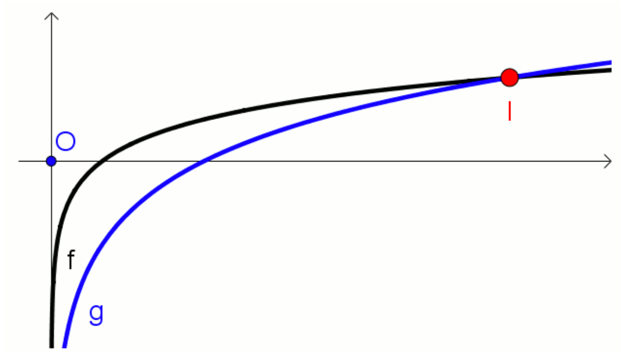
   Qual é o valor do seno de α?

   (**A**) 0.
   (**B**) $\dfrac{1}{4}$.
   (**C**) $\dfrac{1}{2}$.
   (**D**) 1.

5. Na figura estão representadas graficamente duas funções, f e g, definidas em $\mathbb{R}^+$ por,

$$f\left(x\right)=\log_3\left(x\right) \qquad \text{e} \qquad g\left(x\right)=\log_3\left(x^2\right)-2$$

onde $\log_3$ designa a função logaritmo de base 3.



Os gráficos de f e g intersectam-se no ponto I.

A abcissa do ponto I é:

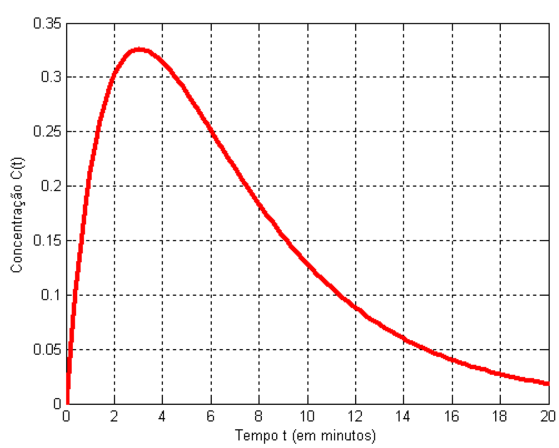
(**A**) 6. (**B**) 7. (**C**) 8. (**D**) 9.

6. A função C, real de variável real, definida por,

$$C\left(t\right)=e^{-0{,}2t}-e^{-0{,}5t}$$

onde t representa o tempo em minutos e e designa o número de Neper, modela a concentração de uma substância durante uma experiência em laboratório.

A figura ilustra o gráfico da concentração nos vinte minutos iniciais da experiência.



Qual o instante do tempo para o qual a concentração é máxima?

(**A**) $3,00$. (**B**) $3,05$. (**C**) $3,10$. (**D**) $3,15$.

7. Considere as funções a e b, reais de variável real, tais que,

$$a(1) = 2, \qquad a'(1) = 3, \qquad b(1) = -2, \qquad \text{e} \qquad b'(1) = 5.$$

Seja c a função definida por $c(x) = \dfrac{x \cdot a(x)}{b(x)}$.

Qual é o valor de $c'(1)$?

(**A**) -5. (**B**) -4. (**C**) 4. (**D**) 5.

8. Uma turma tem nove rapazes e algumas raparigas.

Escolhendo ao acaso um estudante da turma, a probabilidade de ele ser um rapaz é $\dfrac{1}{3}$.

Quantas raparigas tem a turma?

(**A**) 12. (**B**) 15. (**C**) 18. (**D**) 27.

Grupo II

• Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.

• Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.

• **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Determine o valor do limite,

$$\lim_{x \to -1} \left(\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} + \frac{2x^3+x^2-2x-1}{2x^5+3x^4+x^3} \right).$$

2. Considere a sucessão (u_n) cujo seu termo geral é dado por $u_n = 12 - 3n$.

(a) Determine os três primeiros termos da sucessão.

(b) Demonstre que -18 é termo da sucessão e indique a sua ordem.

(c) Demonstre que a sucessão é uma progressão aritmética decrescente.

(d) Determine a soma dos dez termos consecutivos a partir do quinto termo (inclusive).

3. Considere a função f, real de variável real, definida por,

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & se \quad x \leq 1 \\ e^{1-x} & se \quad x > 1 \end{cases}$$

onde e designa o número de Neper.

(a) Determine a derivada da função f.

(b) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 2.

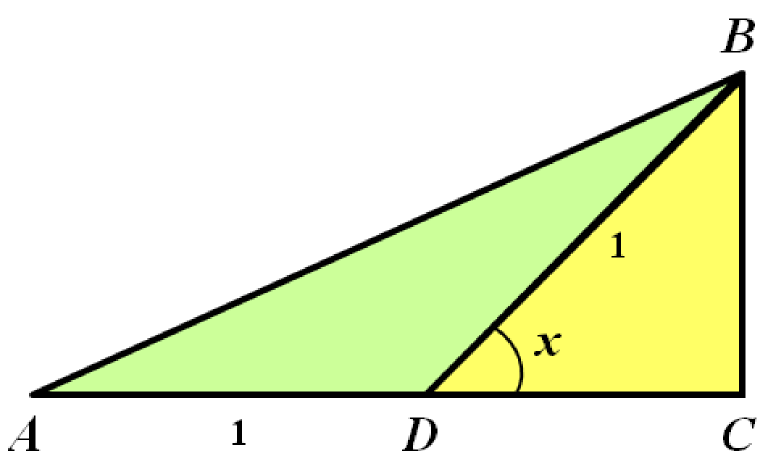
(c) Estude a função f quanto à existência de extremos relativos no intervalo $]-\infty, 1[$.

(d) Determine $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4. Na figura está representado o triângulo retângulo $[ABC]$.

Tem-se que $\overline{AD} = \overline{DB} = 1$ unidade de medida.

Seja x a amplitude (em radianos) do ângulo BDC ($x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).



(a) Demonstre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por,

$$A(x) = \frac{\sin(x) + \sin(x)\cos(x)}{2}$$

onde sin designa a função seno e cos designa a função cosseno.

(b) Demonstre que o perímetro do triângulo $[ABC]$ é dado por,

$$P(x) = 1 + \sin(x) + \cos(x) + \sqrt{2 + 2\cos(x)}$$

onde sin designa a função seno e cos designa a função cosseno.

(c) Admita que $\tan(x) = \dfrac{3}{4}$, onde tan designa a função tangente.

Utilizando os resultados das alíneas anteriores, determine a área e o perímetro do triângulo $[ABC]$.

5. Da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria, 120 estudantes finalistas vão realizar uma viagem pela Europa.

   Entre eles, 48 estudantes sabem falar Inglês, 36 estudantes sabem falar Francês e 12 estudantes sabem falar os dois idiomas.

   Escolhemos ao acaso um dos 120 estudantes finalistas.

   (a) Determine a probabilidade de que o estudante fale algum dos dois idiomas.

   (b) Determine a probabilidade de que o estudante fale Francês, sabendo que fala Inglês.

   (c) Determine a probabilidade de que o estudante só fale Francês.

FIM da Prova de Avaliação

FORMULÁRIO

Regras de Derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a(u))' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

Área de Figuras Planas

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \cdot Altura$

Probabilidades

$\mu = p_1 \cdot x_1 + \ldots + p_n \cdot x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n \cdot (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$

Progressão geométrica: $u_1 \cdot \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Limites Notáveis

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{u_n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

COTAÇÕES

Grupo I		**52**
Cada resposta certa	6,5	
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0	
Grupo II		**148**
1.	18	
2.	30	
(a)	5	
(b)	5	
(c)	10	
(d)	10	
3.	40	
(a)	10	
(b)	10	
(c)	10	
(d)	10	
4.	40	
(a)	15	
(b)	15	
(c)	10	
5.	20	
(a)	10	
(b)	5	
(c)	5	
Total		**200**