

Provas Especialmente Adequadas Destinadas a  
Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos  
Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos  
Maiores de 23 Anos – 2018

Prova de Avaliação de MATEMÁTICA

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde.**
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de “**esferográfica lápis**” e de **corretor**.
- A prova de avaliação tem **8 páginas**.
- A prova de avaliação inclui um **formulário** na **página 7**.
- As **cotações** da prova de avaliação encontram-se na **página 8**.



5. Considere a função  $f$ , real de variável real, definida por,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} & \text{se } x \neq 3 \\ \frac{k}{6} & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

onde  $k$  é um parâmetro real.

Qual é o valor de  $k$  de modo que a função  $f$  seja contínua em  $x = 3$ ?

- (A) 8.                      (B) 6.                      (C) 5.                      (D) 1/6.

6. Considere a função  $g$ , real de variável real, tal que a sua derivada em  $x = 3$  é igual a 6.

Qual é o valor do limite,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}?$$

- (A) 3.                      (B) 1.                      (C) -1.                      (D) -3.

7. Considere a função  $h$ , real de variável real, definida por  $h(x) = \sin(x) \cos(x)$ , onde  $\sin$  designa a função seno e  $\cos$  designa a função cosseno.

Qual é a expressão que define uma equação da reta tangente ao gráfico da função  $h$  no ponto de abscissa  $\frac{\pi}{4}$ ?

- (A)  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\pi}{4}$ .                      (B)  $y = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$ .  
(C)  $y = \frac{1}{2}$ .                      (D)  $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}$ .

8. Seja  $a$  um número real e considere a sucessão  $(u_n)$  definida por,

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = -3u_n + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Qual é o terceiro termo da sucessão?

- (A)  $6a + 4$ .                      (B)  $6a - 4$ .                      (C)  $9a + 4$ .                      (D)  $9a - 4$ .

9. Quatro raparigas e quatro rapazes entram num autocarro, no qual existem seis lugares sentados, ainda não ocupados.
- Qual é o número total de casos diferentes em que se podem ocupar esses seis lugares, admitindo que dois dos rapazes ficam em pé?
- (A) 4320.                      (B) 3560.                      (C) 4180.                      (D) 2520.
10. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados  $\Omega$  finito e dois acontecimentos  $A \subset \Omega$  e  $B \subset \Omega$ , associados a essa experiência. Suponha que  $P(\bar{A}) = 0,48$ ,  $P(A \cup B) = 0,82$  e  $P(B) = 0,42$ .
- Qual é o valor de  $P(A|B)$  arredondado às centésimas?
- (A) 0,52.                      (B) 0,29.                      (C) 0,12.                      (D) 0,48.

## Grupo II

- Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere a função polinomial  $P$ , real de variável real, definida por,

$$P(x) = 2x^3 + kx^2 + (1 - k)x - 3$$

com  $k$  um parâmetro real.

- (a) Determine o valor de  $k$  de modo que a função  $P$  seja divisível por  $x + 1$ .
- (b) Considere  $k = 3$ .
- i. Determine a decomposição em fatores do 1.º grau da função  $P$ .
  - ii. Determine o conjunto solução da condição  $P(x) > 0$ .
  - iii. Determine o valor do limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$ .

2. Considere a função  $f$ , real de variável real, definida por,

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

onde  $e$  designa o número de Neper.

**Recorrendo exclusivamente a processos analíticos**, resolva os itens.

(a) Determine o domínio  $D_f$  da função  $f$ .

(b) Mostre que a derivada da função  $f$  é definida por,

$$f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}, \quad \forall x \in D_f.$$

(c) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $x = 0$ .

(d) Resolva a equação  $\ln[f(x)] = x$  ( $\ln$  designa o logaritmo de base  $e$ ).

(e) Estude a função  $f$  quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em  $D_f$ .

3. A soma dos dois primeiros termos de uma progressão geométrica decrescente é 8 e a sua diferença é 4.

(a) Determine o primeiro termo e a razão da progressão geométrica.

(b) Determine a soma dos doze primeiros termos da progressão geométrica.

4. Um júri de um tribunal é composto por 6 jurados escolhidos ao acaso de uma lista de 30 nomes, dos quais 16 são do género feminino e 14 são do género masculino.

Determine a probabilidade do acontecimento.

(a) O júri é composto apenas por jurados do género masculino.

(b) O júri é composto por 4 jurados do género feminino e por 2 jurados do género masculino.

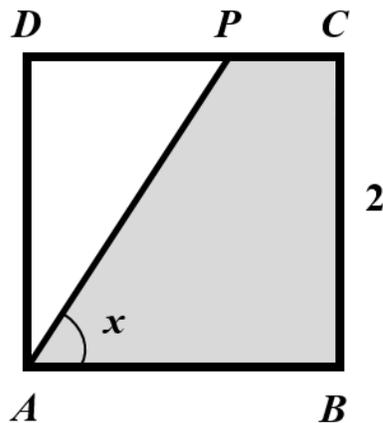
5. De uma empresa com sede em Leiria, sabe-se que:

- o número de funcionários do género feminino é igual ao número de funcionários do género masculino;
- 60 % dos funcionários residem fora de Leiria;
- os restantes funcionários residem em Leiria;
- 30 % dos funcionários do género masculino residem fora de Leiria.

Escolhe-se, ao acaso, um funcionário dessa empresa. Qual é a probabilidade do funcionário escolhido ser do género feminino, sabendo que reside em Leiria?

6. Na figura está representado o quadrado  $[ABCD]$  de lado 2. Considere que um ponto  $P$  se desloca ao longo do lado  $[CD]$ , nunca coincidindo com o ponto  $C$ , nem com o ponto  $D$ .

Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $x$  a amplitude (em radianos) do ângulo  $BAP$  ( $x \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$ ).



**Recorrendo exclusivamente a processos analíticos**, resolva os itens.

(a) Demonstre que a área da região sombreada  $[ABCP]$  é dada por,

$$A(x) = 4 - \frac{2}{\tan(x)}$$

onde  $\tan$  designa a função tangente.

(b) Determine o valor de  $x$  para o qual a área da região sombreada  $[ABCP]$  é  $\frac{12 - 2\sqrt{3}}{3}$ .

(c) Para um certo valor de  $x$  sabe-se que  $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{9}{15}$ , onde  $\cos$  designa a função cosseno. Determine, para esse valor de  $x$ , a área da região sombreada  $[ABCP]$ .

**FIM da Prova de Avaliação**

## FORMULÁRIO

### Regras de Derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$$

$$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$$

### Área de Figuras Planas

$$\text{Trapézio: } \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \cdot \text{Altura}$$

### Probabilidades

$$\mu = p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n \cdot (x_n - \mu)^2}$$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$  então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$

$$\text{Progressão aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$$

$$\text{Progressão geométrica: } u_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

### Limites Notáveis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{u_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

## COTAÇÕES

<b>Grupo I</b> .....	<b>70</b>
Cada resposta certa .....	7
Cada resposta errada, anulada ou não respondida .....	0
<b>Grupo II</b> .....	<b>130</b>
<b>1.</b> .....	<b>25</b>
<b>(a)</b> .....	5
<b>(b)</b> .....	20
<b>i.</b> .....	8
<b>ii.</b> .....	7
<b>iii.</b> .....	5
<b>2.</b> .....	<b>30</b>
<b>(a)</b> .....	4
<b>(b)</b> .....	7
<b>(c)</b> .....	4
<b>(d)</b> .....	7
<b>(e)</b> .....	8
<b>3.</b> .....	<b>20</b>
<b>(a)</b> .....	10
<b>(b)</b> .....	10
<b>4.</b> .....	<b>15</b>
<b>(a)</b> .....	7
<b>(b)</b> .....	8
<b>5.</b> .....	<b>15</b>
<b>6.</b> .....	<b>25</b>
<b>(a)</b> .....	8
<b>(b)</b> .....	7
<b>(c)</b> .....	10
<b>Total</b> .....	<b>200</b>