Leopold Kronecker's Werke

Kronecker, Leopold

Leipzig, 1895-1931

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-17875

Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste.

BEWEIS DES RECIPROCITÄTSGESETZES FÜR DIE QUADRATISCHEN RESTE.

(Aus einem Aufsatze in No. XLVIII der Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1885.)
[Band III S. 111—136 dieser Ausgabe.]

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 104. S. 348—351.

BEWEIS DES RECIPROCITÄTSGESETZES FÜR DIE QUADRATISCHEN RESTE.

Bei „logarithmischer Umgestaltung" der Deduction, welche ich im 96sten Bande dieses Journals (S. 348[1]) gegeben habe, gelangt man in fast ebenso einfacher Weise zu der Reciprocitätsgleichung:

$$(A.)\qquad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}.$$

Hierin bedeuten m und n ungrade Zahlen, und die Zeichen $\left(\frac{m}{n}\right)$, $\left(\frac{n}{m}\right)$ werden, wenn, wie in meinen früheren Aufsätzen, mit sgn. a die mit dem Vorzeichen von a genommene Einheit und mit $R(a)$ der kleinste Rest von a bezeichnet wird, durch die Gleichungen definirt:

$$(B.)\qquad \left(\frac{m}{n}\right) = \text{sgn.} \prod_k R\left(\frac{km}{n}\right),\quad \left(\frac{n}{m}\right) = \text{sgn.} \prod_h R\left(\frac{hn}{m}\right) \qquad \left(\begin{smallmatrix} h=1,\,2,\,\dots\,\frac{1}{2}(m-1) \\ k=1,\,2,\,\dots\,\frac{1}{2}(n-1) \end{smallmatrix}\right).$$

Für jede der Zahlen $h = 1, 2, \dots \frac{1}{2}(m-1)$ ist:

$$(C.)\qquad \tfrac{1}{2}\sum_k \left(1 + \text{sgn.}\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \tfrac{1}{2}\right)\right) = \left[\frac{hn}{m} + \tfrac{1}{2}\right],\qquad \tfrac{1}{2}\sum_k \left(1 + \text{sgn.}\left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\right) = \left[\frac{hn}{m}\right].$$
$$(k=1,\,2,\,\dots\,\tfrac{1}{2}(n-1))$$

Denn in der ersten Gleichung giebt der Ausdruck auf jeder der beiden Seiten die Anzahl der Zahlen $\frac{1}{2}(n+1) - k$ an, welche kleiner als $\frac{hn}{m} + \frac{1}{2}$ sind,

[1]) Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Bd. II S. 523—527 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H.

während durch die Ausdrücke auf beiden Seiten der zweiten Gleichung die Anzahl derjenigen Zahlen k dargestellt wird, die kleiner als $\frac{hn}{m}$ sind. Ferner ist offenbar:

$$\left[\frac{hn}{m}+\tfrac{1}{2}\right]-\left[\frac{hn}{m}\right]=\tfrac{1}{2}\left(1-\operatorname{sgn.} R\left(\frac{hn}{m}\right)\right)\equiv\frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn.} R\left(\frac{hn}{m}\right) \quad (\text{mod. } 2);$$

die Gleichungen ($C.$) führen daher zu der Congruenz:

$$(D.) \qquad \tfrac{1}{2}\sum_k \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_k \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\equiv\frac{1}{\pi i}\log \operatorname{sgn.} R\left(\frac{hn}{m}\right) \quad (\text{mod. } 2)$$

$$(k=1,\ 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)),$$

und aus dieser resultirt mit Hülfe der Gleichungen ($B.$) die folgende:

$$(E.) \qquad \tfrac{1}{2}\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\equiv\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{n}{m}\right) \quad (\text{mod. } 2)$$

$$(h=1,\ 2, \ldots \tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,\ 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)),$$

deren unmittelbare Folge die Congruenz:

$$(F.) \qquad \frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{m}{n}\right)\pm\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{n}{m}\right)\equiv(m-1)(n-1) \quad (\text{mod. } 2),$$

und also auch die Reciprocitätsgleichung:

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}$$

ist. Denn wenn man in der Congruenz ($E.$) m mit n und h mit k vertauscht, so kommt:

$$(E'.) \qquad \tfrac{1}{2}\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\sum_{h,k} \operatorname{sgn.}\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right)\equiv\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{m}{n}\right) \quad (\text{mod. } 2),$$

und die Verbindung der Congruenzen ($E.$) und ($E'.$) ergiebt, dass:

$$\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{m}{n}\right)+\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{n}{m}\right)\equiv\sum_{h,k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\right)\pmod{2},$$

$$\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{m}{n}\right)-\frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{n}{m}\right)\equiv\sum_{h,k}\operatorname{sgn.}\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)\pmod{2}$$

$$(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1))$$

ist. Es bedarf daher nur noch der Bemerkung, dass jedes einzelne von den $\frac{1}{4}(m-1)(n-1)$ Gliedern der Summen auf der rechten Seite *modulo* 2 congruent 1 ist, um die Richtigkeit der Congruenz ($F.$) zu begründen.

In einem auf S. 109—111 des 12. Bandes der *Acta Mathematica* abgedruckten Aufsatze des Herrn *Jacob Hacks*[1]) ist die oben in den Gleichungen ($C.$) dargelegte, schon von *Genocchi* erkannte Bedeutung der Zahlen*):

$$\left[\frac{hn}{m}+\tfrac{1}{2}\right]\quad\text{und}\quad\left[\frac{hn}{m}\right]$$

nicht bemerkt. Diese Bedeutung setzt aber die Relationen, deren Nachweis jener Aufsatz gewidmet ist, und welche in den hier gebrauchten Zeichen folgendermassen lauten:

$$\sum_h\left[\frac{hn}{m}+\tfrac{1}{2}\right]=\sum_k\left[\frac{km}{n}+\tfrac{1}{2}\right],\qquad\sum_h\left[\frac{hn}{m}\right]+\sum_k\left[\frac{km}{n}\right]=\tfrac{1}{4}(m-1)(n-1)$$

$$(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1);\ k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1))$$

unmittelbar in Evidenz und macht daher die ganze dortige Beweisführung entbehrlich.

In dem oben formulirten Reciprocitätsgesetzbeweise hat man — wie im art. VII meiner im Titel angeführten Arbeit: „Die absolut kleinsten Reste

---

*) Vergl. auch den Schluss von art. VII meiner Mittheilung im Stück XLVIII der Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1885[2]).

[1]) *J. Hacks*, Scherings Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste dargestellt mit Hülfe des Zeichens $[x]$. H.

[2]) Bd. III S. 133 dieser Ausgabe. H.

reeller Grössen“ näher ausgeführt ist — nur eine logarithmische Umgestaltung des dritten *Gauss*'schen Beweises zu sehen. Dasselbe gilt von dem fünften *Gauss*'schen, von dem *Genocchi*'schen*) und dem damit übereinkommenden *Schering*'schen Beweise, an welchen der oben erwähnte Aufsatz des Herrn *Hacks* anknüpft.

Der Ausgangspunkt der *Genocchi*'schen Entwickelung lässt sich mittels der hier gebrauchten Bezeichnungen durch die Gleichung:

$$(G.)\qquad \tfrac{1}{2}\Big(1-\text{sgn.}\,R\Big(\frac{nh}{m}\Big)\Big)=\tfrac{1}{2}\sum_k\Big(1+\text{sgn.}\Big(\frac{h}{m}+\frac{k}{n}-\tfrac{1}{2}\Big)\Big)-\tfrac{1}{2}\sum_k\Big(1+\text{sgn.}\Big(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\Big)\Big)$$

$$\Big(h=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(m-1);\; k=1,2,\ldots\tfrac{1}{2}(n-1)\Big)$$

darstellen, während die Ausführungen des Herrn *Schering* darauf basiren, dass für $x \geqq 0$:

$$(H.)\qquad \tfrac{1}{2}(1-\text{sgn.}\,R(x))=\tfrac{1}{2}\sum_{k'}(1+\text{sgn.}\,(x+\tfrac{1}{2}-k'))-\tfrac{1}{2}\sum_k(1+\text{sgn.}\,(x-k))$$

$$(k,k'=1,2,3,\ldots \text{ in inf.})$$

ist. Diese letztere Gleichung ist freilich allgemeiner als die erstere (*G.*), sie findet aber in der *Schering*'schen Deduction**) nur für $x=\frac{nh}{m}$ Anwendung, und hierfür stimmt sie mit der *Genocchi*'schen Gleichung genau überein. Um dies zu erkennen, braucht man nur die Summationen in der Gleichung (*H.*) auf die positiven Zahlen k, k', die kleiner als $\frac{1}{2}n$ sind, zu beschränken und den Summationsbuchstaben k' durch $\frac{1}{2}(n+1)-k$ zu ersetzen.

Ich bin auf den Beweis, welchen *Genocchi* im art. XIII seiner im Jahre 1852 der Akademie zu Brüssel eingesandten und bald darauf dort preisgekrönten und publicirten Arbeit gegeben hat, erst im Anfange des Jahres

---

*) Vgl. art. VIII meiner Mittheilung im Stück XLVIII der Sitzungsberichte von 1885[1]).

**) Vgl. die mit [1] bezeichnete Gleichung auf S. 220 der Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von 1879.

[1]) Band III S. 133 flgde. dieser Ausgabe. H.

1881 durch eine von ihm selbst erhaltene briefliche Mittheilung aufmerksam geworden*). Indessen hatte *Genocchi* schon in den Comptes Rendus der Pariser Akademie vom 16. Februar 1880 eine Notiz darüber veröffentlicht. Bis dahin scheint aber sein Beweis einem grossen Theile des mathematischen Publikums unbekannt geblieben zu sein; wenigstens haben wir beide, Herr *Schering* und ich, ihn in den verbreitetsten Werken und Zeitschriften nirgends erwähnt gefunden. Um ihn nunmehr in der ursprünglichen Darstellung allgemeiner zugänglich zu machen, habe ich auf den vorhergehenden Seiten den ersten Theil des art. XIII der erwähnten *Genocchi*'schen Preisschrift abdrucken lassen[1]).

---

*) In demselben Briefe lenkte *Genocchi* meine Aufmerksamkeit auf einen von *Schaar* in den Schriften der Brüsseler Akademie veröffentlichten Beweis, der mir ebenfalls entgangen ist, mit folgenden Worten:

„Mais entre toutes les démonstrations de la loi de réciprocité, celle que vous avez publiée en 1876 (Monatsberichte p. 331[2]) est surtout remarquable parce qu'elle se renferme dans le champ des résidus quadratiques, comme la première de *Gauss* et n'emprunte rien à la théorie des résidus des puissances supérieures. Toutefois les produits que vous considérez sont à-peu-près les mêmes que M. *Schaar* avait introduits dès 1847 dans la démonstration de la loi de réciprocité (Bulletin de l'Académie de Belgique, I Série, Tome XIV, Partie I, p. 79—83) sans pouvoir la rendre indépendante de l'art. 106 des *Disquisitiones*."

[1]) Première partie du chapitre XIII de la Note sur la théorie des résidus quadratiques par *Angelo Genocchi*; Crelles Journal Bd. 104 S. 345—347. H.

[2]) Ueber das Reciprocitätsgesetz; Band II S. 11—25 dieser Ausgabe von *L. Kronecker*'s Werken. H.