

www.e-rara.ch

Leopold Kronecker's Werke

Kronecker, Leopold

Leipzig, 1895-1931

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 10311

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-17875>

Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

BEWEIS DES RECIPROCITÄTSGESETZES FÜR DIE QUADRATISCHEN RESTE.

(Aus einem Aufsätze in No. XLVIII der Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1885.)
[Band III S. 111—136 dieser Ausgabe.]

VON

L. KRONECKER.

Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 104. S. 348—351.

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a title or introductory paragraph.

BREITEN DER RECHENKUNST
FÜR DIE QUADRATISCHEN RESTE

Faint text below the title, likely the beginning of the main text or a preface.

Main body of faint, illegible text, possibly containing mathematical content or a detailed explanation.

Faint text at the bottom of the page, possibly a conclusion or a reference section.

BEWEIS DES RECIPROCITÄTSGESETZES FÜR DIE QUADRATISCHEN RESTE.

Bei „logarithmischer Umgestaltung“ der Deduction, welche ich im 96^{sten} Bande dieses Journals (S. 348¹) gegeben habe, gelangt man in fast ebenso einfacher Weise zu der Reciprocitätsgleichung:

$$(A.) \quad \left(\frac{m}{n}\right) \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)(n-1)}.$$

Hierin bedeuten m und n ungrade Zahlen, und die Zeichen $\left(\frac{m}{n}\right)$, $\left(\frac{n}{m}\right)$ werden, wenn, wie in meinen früheren Aufsätzen, mit $\text{sgn. } a$ die mit dem Vorzeichen von a genommene Einheit und mit $R(a)$ der kleinste Rest von a bezeichnet wird, durch die Gleichungen definiert:

$$(B.) \quad \left(\frac{m}{n}\right) = \text{sgn.} \prod_k R\left(\frac{km}{n}\right), \quad \left(\frac{n}{m}\right) = \text{sgn.} \prod_h R\left(\frac{hn}{m}\right) \quad \left(\begin{array}{l} h=1, 2, \dots, \frac{1}{2}(m-1) \\ k=1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n-1) \end{array}\right).$$

Für jede der Zahlen $h = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(m-1)$ ist:

$$(C.) \quad \frac{1}{2} \sum_k \left(1 + \text{sgn.} \left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right)\right) = \left[\frac{hn}{m} + \frac{1}{2}\right], \quad \frac{1}{2} \sum_k \left(1 + \text{sgn.} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\right) = \left[\frac{hn}{m}\right].$$

$(k=1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n-1))$

Denn in der ersten Gleichung giebt der Ausdruck auf jeder der beiden Seiten die Anzahl der Zahlen $\frac{1}{2}(n+1) - k$ an, welche kleiner als $\frac{hn}{m} + \frac{1}{2}$ sind,

¹) Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Bd. II S. 523—527 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

während durch die Ausdrücke auf beiden Seiten der zweiten Gleichung die Anzahl derjenigen Zahlen k dargestellt wird, die kleiner als $\frac{hn}{m}$ sind. Ferner ist offenbar:

$$\left[\frac{hn}{m} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{hn}{m}\right] = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{sgn}. R\left(\frac{hn}{m}\right)\right) \equiv \frac{1}{\pi i} \log \operatorname{sgn}. R\left(\frac{hn}{m}\right) \pmod{2};$$

die Gleichungen (C.) führen daher zu der Congruenz:

$$(D.) \quad \frac{1}{2} \sum_k \operatorname{sgn}. \left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \sum_k \operatorname{sgn}. \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right) \equiv \frac{1}{\pi i} \log \operatorname{sgn}. R\left(\frac{hn}{m}\right) \pmod{2}$$

($k=1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n-1)$),

und aus dieser resultirt mit Hülfe der Gleichungen (B.) die folgende:

$$(E.) \quad \frac{1}{2} \sum_{h,k} \operatorname{sgn}. \left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \sum_{h,k} \operatorname{sgn}. \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right) \equiv \frac{1}{\pi i} \log \left(\frac{n}{m}\right) \pmod{2}$$

($h=1, 2, \dots, \frac{1}{2}(m-1); k=1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n-1)$),

deren unmittelbare Folge die Congruenz:

$$(F.) \quad \frac{1}{\pi i} \log \left(\frac{m}{n}\right) \pm \frac{1}{\pi i} \log \left(\frac{n}{m}\right) \equiv (m-1)(n-1) \pmod{2},$$

und also auch die Reciprocitätsgleichung:

$$\left(\frac{m}{n}\right) \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}$$

ist. Denn wenn man in der Congruenz (E.) m mit n und h mit k vertauscht, so kommt:

$$(E'.) \quad \frac{1}{2} \sum_{h,k} \operatorname{sgn}. \left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \sum_{h,k} \operatorname{sgn}. \left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right) \equiv \frac{1}{\pi i} \log \left(\frac{m}{n}\right) \pmod{2},$$

und die Verbindung der Congruenzen (E.) und (E'.) ergibt, dass:

$$\frac{1}{\pi i} \log \left(\frac{m}{n} \right) + \frac{1}{\pi i} \log \left(\frac{n}{m} \right) \equiv \sum_{h, k} \operatorname{sgn.} \left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2} \right) \pmod{2},$$

$$\frac{1}{\pi i} \log \left(\frac{m}{n} \right) - \frac{1}{\pi i} \log \left(\frac{n}{m} \right) \equiv \sum_{h, k} \operatorname{sgn.} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n} \right) \pmod{2}$$

$$(h=1, 2, \dots, \frac{1}{2}(m-1); k=1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n-1))$$

ist. Es bedarf daher nur noch der Bemerkung, dass jedes einzelne von den $\frac{1}{4}(m-1)(n-1)$ Gliedern der Summen auf der rechten Seite *modulo* 2 congruent 1 ist, um die Richtigkeit der Congruenz (F.) zu begründen.

In einem auf S. 109—111 des 12. Bandes der *Acta Mathematica* abgedruckten Aufsätze des Herrn *Jacob Hacks*¹⁾ ist die oben in den Gleichungen (C.) dargelegte, schon von *Genocchi* erkannte Bedeutung der Zahlen*):

$$\left[\frac{hn}{m} + \frac{1}{2} \right] \quad \text{und} \quad \left[\frac{hn}{m} \right]$$

nicht bemerkt. Diese Bedeutung setzt aber die Relationen, deren Nachweis jener Aufsatz gewidmet ist, und welche in den hier gebrauchten Zeichen folgendermassen lauten:

$$\sum_h \left[\frac{hn}{m} + \frac{1}{2} \right] = \sum_k \left[\frac{km}{n} + \frac{1}{2} \right], \quad \sum_h \left[\frac{hn}{m} \right] + \sum_k \left[\frac{km}{n} \right] = \frac{1}{4}(m-1)(n-1)$$

$$(h=1, 2, \dots, \frac{1}{2}(m-1); k=1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n-1))$$

unmittelbar in Evidenz und macht daher die ganze dortige Beweisführung entbehrlich.

In dem oben formulirten Reciprocitätsgesetzbeweise hat man — wie in art. VII meiner im Titel angeführten Arbeit: „Die absolut kleinsten Reste

*) Vergl. auch den Schluss von art. VII meiner Mittheilung im Stück XLVIII der Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1885²⁾.

¹⁾ *J. Hacks*, Scherings Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste dargestellt mit Hilfe des Zeichens $[x]$. H.

²⁾ Bd. III S. 133 dieser Ausgabe. H.

reeller Grössen“ näher ausgeführt ist — nur eine logarithmische Umgestaltung des dritten *Gauss'schen* Beweises zu sehen. Dasselbe gilt von dem fünften *Gauss'schen*, von dem *Genocchi'schen**) und dem damit übereinkommenden *Schering'schen* Beweise, an welchen der oben erwähnte Aufsatz des Herrn *Hacks* anknüpft.

Der Ausgangspunkt der *Genocchi'schen* Entwicklung lässt sich mittels der hier gebrauchten Bezeichnungen durch die Gleichung:

$$(G.) \quad \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{sgn}. R \left(\frac{nh}{m} \right) \right) = \frac{1}{2} \sum_k \left(1 + \operatorname{sgn}. \left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \sum_k \left(1 + \operatorname{sgn}. \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n} \right) \right)$$

($h=1, 2, \dots, \frac{1}{2}(m-1)$; $k=1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n-1)$)

darstellen, während die Ausführungen des Herrn *Schering* darauf basiren, dass für $x \geq 0$:

$$(H.) \quad \frac{1}{2} (1 - \operatorname{sgn}. R(x)) = \frac{1}{2} \sum_k (1 + \operatorname{sgn}. (x + \frac{1}{2} - k')) - \frac{1}{2} \sum_k (1 + \operatorname{sgn}. (x - k))$$

($k, k'=1, 2, 3, \dots$ in inf.)

ist. Diese letztere Gleichung ist freilich allgemeiner als die erstere (*G.*), sie findet aber in der *Schering'schen* Deduction**) nur für $x = \frac{nh}{m}$ Anwendung, und hierfür stimmt sie mit der *Genocchi'schen* Gleichung genau überein. Um dies zu erkennen, braucht man nur die Summationen in der Gleichung (*H.*) auf die positiven Zahlen k, k' , die kleiner als $\frac{1}{2}n$ sind, zu beschränken und den Summationsbuchstaben k' durch $\frac{1}{2}(n+1) - k$ zu ersetzen.

Ich bin auf den Beweis, welchen *Genocchi* im art. XIII seiner im Jahre 1852 der Akademie zu Brüssel eingesandten und bald darauf dort preisgekrönten und publicirten Arbeit gegeben hat, erst im Anfange des Jahres

*) Vgl. art. VIII meiner Mittheilung im Stück XLVIII der Sitzungsberichte von 1885¹⁾.

**) Vgl. die mit [1] bezeichnete Gleichung auf S. 220 der Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von 1879.

¹⁾ Band III S. 133 flgde. dieser Ausgabe.

1881 durch eine von ihm selbst erhaltene briefliche Mittheilung aufmerksam geworden*). Indessen hatte *Genocchi* schon in den Comptes Rendus der Pariser Akademie vom 16. Februar 1880 eine Notiz darüber veröffentlicht. Bis dahin scheint aber sein Beweis einem grossen Theile des mathematischen Publikums unbekannt geblieben zu sein; wenigstens haben wir beide, Herr *Schering* und ich, ihn in den verbreitetsten Werken und Zeitschriften nirgends erwähnt gefunden. Um ihn nunmehr in der ursprünglichen Darstellung allgemeiner zugänglich zu machen, habe ich auf den vorhergehenden Seiten den ersten Theil des art. XIII der erwähnten *Genocchi'schen* Preisschrift abdrucken lassen¹⁾.

*) In demselben Briefe lenkte *Genocchi* meine Aufmerksamkeit auf einen von *Schaar* in den Schriften der Brüsseler Akademie veröffentlichten Beweis, der mir ebenfalls entgangen ist, mit folgenden Worten:

„Mais entre toutes les démonstrations de la loi de réciprocité, celle que vous avez publiée en 1876 (Monatsberichte p. 331²⁾) est surtout remarquable parce qu'elle se renferme dans le champ des résidus quadratiques, comme la première de *Gauss* et n'emprunte rien à la théorie des résidus des puissances supérieures. Toutefois les produits que vous considérez sont à-peu-près les mêmes que M. *Schaar* avait introduits dès 1847 dans la démonstration de la loi de réciprocité (Bulletin de l'Académie de Belgique, I Série, Tome XIV, Partie I, p. 79—83) sans pouvoir la rendre indépendante de l'art. 106 des *Disquisitiones*.“

¹⁾ Première partie du chapitre XIII de la Note sur la théorie des résidus quadratiques par *Angelo Genocchi*; Crelles Journal Bd. 104 S. 345—347. H.

²⁾ Ueber das Reciprocitätsgesetz; Band II S. 11—25 dieser Ausgabe von *L. Kronecker's* Werken. H.

The first part of the book is devoted to a general survey of the history of the United States from the discovery of the continent to the present time. The author discusses the various stages of the nation's development, from the early colonial period to the formation of the Union, and the subsequent growth and expansion of the country. He also touches upon the political, economic, and social changes that have shaped the nation over the centuries.

In the second part of the book, the author provides a detailed account of the American Revolution, from the outbreak of hostilities in 1775 to the signing of the Declaration of Independence in 1776. He examines the military and political struggles of the time, as well as the role of the common people in the revolution. The author also discusses the impact of the revolution on the young nation and the challenges it faced in the years following independence.

The third part of the book focuses on the period of the early republic, from the 1790s to the 1820s. The author explores the political and economic developments of this era, including the rise of the Federalist Party and the emergence of the Democratic-Republican Party. He also discusses the role of the Supreme Court in shaping the nation's political landscape and the impact of the War of 1812 on the country's development.

The final part of the book covers the period from the 1820s to the present time. The author discusses the westward expansion of the United States, the rise of the industrial revolution, and the challenges of the Civil War. He also touches upon the Reconstruction period, the Gilded Age, and the Progressive Era, as well as the role of the United States in the world during the 20th century.