Simpliziale Komplexe

J. Schwulst (j_schw26@uni-muenster.de)

21. April 2010

In diesem Vortrag werden zuerst einige topologische Grundlagen definiert und anschließend der Begriff des Simplizialen Komplexes erarbeitet und kurz umrissen.

1 Topologien

Wenn man $\mathbb{R}$ als metrischen Raum betrachtet, dann entwickelt sich schnell der Begriff der offenen Menge. In ihr muss jeder Punkt eine offene ϵ-Umgebung haben. Will man dieses Konzept verallgemeinern, indem man einige charakteristische Merkmale herausgreift, kommt man zu dem Konzept der Topologie.

Definition 1.1. Sei X eine Menge. Eine Topologie I auf X ist ein Teilmengensystem mit folgenden Eigenschaften:

1. $\emptyset, X \in I$
2. Sind $O_j \in I,\ j \in J$, so ist $\bigcup_{j\in J} O_j \in I$
3. Sind $O_1, \ldots, O_n \in I$, so ist $\bigcap_{j=1}^{n} O_j \in I$

Die O_j heißen offene Mengen der Topologie. Das Paar (X, I),kurz X, heißt topologischer Raum.

Bemerkung 1.2. Jeder metrische Raum M ist offensichtlich topologisierbar via den ϵ-Umgebungen. Genauer: U ist offen, falls zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon \geq 0$ existiert, mit $U_\epsilon(x) := \{y \in M |\ d(x,y) < \epsilon\} \subset U$, wobei $d(x,y)$ die Metrik sei.
Jedoch ist die kleinste Topologie auf X jene, welche nur aus X und der leeren Menge besteht. Insbesondere ist X unter diesem Umständen nicht Hausdorffsch und damit auch nicht metrisierbar, falls X mindestens 2 Punkte hat.

Seminar „Algorithmische Topologie“, SS 2010, WWU Münster

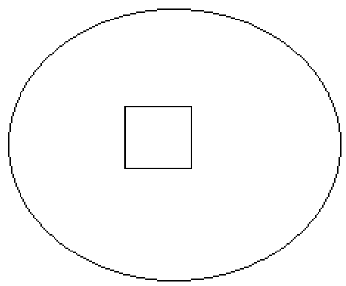
Definition 1.3. Sei (X, I) ein topologischer Raum. Ist $Y \subseteq X$, so ist

$$I_Y := \{Y \cap U,\ U \in I\}$$

eine Topologie, genannt Unterraum-Topologie auf Y. (Y, I_y) wird Unterraum von (X, I) genannt. Ist X metrisierbar, so ist Y auch metrisierbar.

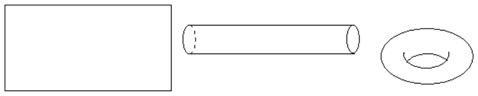
Definition 1.4. Seien $X_1, \dots, X_n$ topologische Räume. Eine Menge $O \subset \prod_{i=1}^n X_i$ ist ein Element der Produkt-Topologie, falls zu jedem Punkt $x \in O$ offene Mengen $O_i \subset X_i$ existieren, mit $x \in \prod_{i=1}^n O_i \subset O$.

Beispiel 1.5. $\mathbb{R}^n$ wird so kanonisch als Produkt ein topologischer Raum. $O \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Leftrightarrow$ zu jedem $x = (x_1, \dots, x_n) \in O$ existiert ein $\epsilon > 0$ mit $\prod_{i=1}^n U_\epsilon(x_i) \subset O$



Definition 1.6. Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Eine Teilmenge $U \subset X/\sim$ heißt offen in der Quotienten-Topologie, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in X ist, wobei $\pi : X \to X/\sim,\ \pi(x) = [x]$ die kanonische Projektion ist. Mit dieser Topologie heißt $X/\sim$ Quotientenraum von X nach $\sim$.

Beispiel 1.7.



Definition 1.8. Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig, falls für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ ihr Urbild $f^{-1}(U)$ eine offene Teilmenge von X ist.

Bemerkung 1.9. Für $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird so das übliche $\epsilon - \delta$ Kriterium beschrieben.

Definition 1.10. Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt Homöomorphismus, falls f stetig ist und eine stetige Umkehrabbildung besitzt. Existiert ein solches f, heißen X und Y homöomorph.

Beispiel 1.11. (0,1) ist mittels $x \mapsto tan((x - \frac{1}{2})\pi)$ homöomorph zu $\mathbb{R}$.

Definition 1.12. Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ stetige Abbildungen. Eine Homotopie von f und g ist eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$ mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$. Existiert ein solches H sagt man f ist homotop zu g, $f \sim g$.

Beispiel 1.13. Sei $X = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis in der Ebene und $Y = \mathbb{R}^2$ die ganze Ebene, $f(x) = x$, $g(x) = 0$. Dann sind f und g homotop, denn
$H : X \times [0,1] \to \mathbb{R}^2, H(x,t) = (1-t)f(x)$.

2 Simplizes

Es gibt viele Wege einen topologischen Raum darzustellen. Einer davon geht über die Gliederung des Raumes in einfache Teile.

Definition 2.1. Seien $u_0, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^d$.

1. $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$, heißt affine Kombination der u_i, falls $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$ gilt.
2. Eine affine Kombination $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i$ heißt konvexe Kombination, falls alle $\lambda_i \geq 0$ sind. Die Menge der Konvexen Kombinationen heißt konvexe Hülle
3. Die u_i heißen affin unabhängig, falls die $u_i - u_0,\ i = 1, \ldots, k$ linear unabhängig sind.

Definition 2.2. Seien $u_0, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^d$, affin unabhängig. Ein k-Simplex σ ist die konvexe Hülle der u_i, schreibe $\sigma = conv\{u_0, \ldots, u_k\}$. Nach 2.1.1 hat er die Dimension k. Jede Teilmenge T der $\{u_i,\ i = 0, \ldots, k\}$ besteht wieder aus affin unabhängigen Punkten, ihre konvexe Hülle nennt man Seite, bzw. echte Seite, falls T echte Teilmenge ist.

Beispiel 2.3. Ein 0-Simplex ist ein Punkt, ein 1-Simplex eine Strecke, ein 2-Simplex ein Dreieck, ein 3-Simplex ein Tetraeder. Dies sieht man z.B. für den 1-Simplex anhand $x = ta_o + (1-t)a_1$

Definition 2.4. Ein Simplizialer Komplex K in $\mathbb{R}^n$ ist eine endliche Menge von Simplizes, so dass

1. Jede Seite von einem Simplex $\sigma \in K$ ist wieder in K.
2. Für $\sigma_1,\ \sigma_2 \in K$ gilt: $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ oder $\sigma_1 \cap \sigma_2$ ist eine Seite von σ_1 und σ_2

Beispiel 2.5.

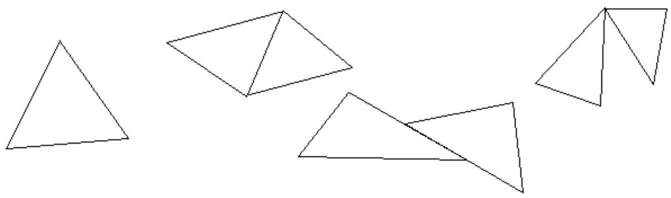


Abbildung 1: Drei davon sind Simpliziale Komplexe

Definition 2.6. Sei $|K|$ die Untermenge von $\mathbb{R}^n$, welche aus der Vereinigung der Simplizes aus K besteht. Man nennt $|K|$ Polyeder. Eine Teilmenge $A \subset |K|$ ist abgeschlossen in $|K|$, g.d.w. $A \cap \sigma$ abgeschlossen ist in jedem $\sigma \in K$, mittels der Teilraum-Topologie auf $\sigma \in \mathbb{R}$

Bemerkung 2.7. Im Allgemeinen (also z.B. $\mathbb{R}^k$, mit k nicht endlich) ist die Topologie I aus Definition 2.6 feiner als die Topologie I', welche$|K|$ als Unterraum von $\mathbb{R}^n$ erbt (d.h. $I' \subset I$). Wenn $|K|$ jedoch, wie bei uns, endlich ist, stimmen I und I' jedoch überein. $|K|$ ist Hausdorffsch und kompakt, da es eine endliche Vereinigung von kompakten Unterräumen σ ist.

Um Simpliziale Komplexe genauer untersuchen zu können, kann man sich die Frage stellen, was genau seine wichtigsten Charakteristika sind. Nimmt man nur die Ecken-mengen seiner Simplizes landet man bei einem *Abstrakten* Simplizialen Komplex.

Definition 2.8. Seien $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ endliche Mengen. $A := \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$ heißt abstrakter Simplizialer Komplex, falls gilt:

$$\alpha \in A,\ \beta \subseteq \alpha \Rightarrow \beta \in A$$

Bemerkung 2.9. Die Mengen in A sind seine Simplizes, $dim\alpha := card(\alpha) - 1$, $dimA := \max_{\alpha \in A} dim(\alpha)$

Definition 2.10. Die Punkt-Menge V_A von A ist die Vereinigung aller $\alpha \in A$ mit $card\alpha = 1$.
Sei K ein Simplizialer Komplex, V_K seine Ecken-Menge. Ein Ecken-Schema von K ist die Menge $\mathcal{K}$ von allen Teilmengen $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\} \subseteq V_K$, so dass die Punkte $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ einen Simplex in K aufspannen. K heißt geometrische Realisierung von $\mathcal{K}$.

Satz 2.11. *Jeder abstrakte simpliziale Komplex A mit Dimension d, hat eine geometrische Realisierung in* $\mathbb{R}^{2d+1}$.

Beweis. Sei A ein Abstrakter Simplizialer Komplex, V_A seine Punkt-Menge.
Sei $f : V_A \to \mathbb{R}^{2d+1}$ eine Injektion, wobei das Bild eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage ist. Genauer sind also immer $2d + 2$ oder weniger Punkte affin unabhängig. Seien $\alpha,\ \alpha_0$ Simplizes in A, $k = dim\alpha,\ k_0 = dim\alpha_0$. Es gilt $card(\alpha \cup \alpha_0) = card\alpha + card\alpha_0 - card(\alpha \cap \alpha_0) \leq k + k_0 + 2 \leq 2d + 2$. Also sind die Punkte in $f(\alpha \cup \alpha_0)$ affin unabhängig. Also ist jede konvexe Kombination x von Punkten in $f(\alpha \cup \alpha_0)$ eindeutig. Also gehört x genau dann sowohl zu $\sigma = conv(f(\alpha))$ als auch zu $\sigma_0 = conv(f(\alpha_0))$, wenn x eine konvexe Kombination von $f(\alpha \cap \alpha_0)$ ist. Es folgt, das der Schnitt von σ und σ_0 entweder leer , oder aber, wie gewünscht, der Simplex $conv(f(\alpha \cap \alpha_0))$ ist. $\square$

Definition 2.12. Seien $K,\ L$ Simpliziale Komplexe, $V_K = \{u_0, \ldots, u_n\}$. Also gilt für alle $x \in |K| :\ x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$.

1. Setze $b_i(x) = \lambda_i$. Man nennt die b_i die Baryzentrischen Koordinaten von x.
2. Eine Punkt-Abbildung ist eine Funktion $\varphi : V_K \to V_L$, mit der Eigenschaft, dass für jedes $\sigma = conv(u_{i_1}, \ldots, u_{i_j}) \in K,\ j \in \{0, \ldots, n\}$
   $\sigma_0 = conv(\varphi(u_{i_1}), \ldots, \varphi(u_{i_j})) \in L$

Dann kann man ϕ in natürlicher Weise zu einer stetigen Abbildung $f : |K| \to |L|$ ausdehnen, mit $f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i(x)\varphi(u_i)$. Man nennt f eine von φ aufgespannte simpliziale Abbildung.

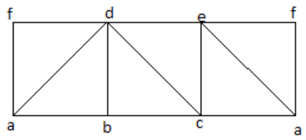
Satz 2.13. *Seien K und L Simpliziale Komplexe, φ eine bijektive Punkt-Abbildung für die zusätzlich gilt, dass die $u_1, \dots, u_n \in V_K$ genau dann einen Simplex in K aufspannen, wenn die $f(u_1), \dots, f(u_n)$ einen Simplex in L aufspannen. Dann ist die von φ aufgespannte simpliziale Abbildung $f : |K| \to |L|$ ein Homöomorphismus.*
Insbesondere sind zwei Simpliziale Komplexe K und T genau dann isomorph, wenn es für ihre Punkt-Schemata $\mathcal{K}$ und $\mathcal{T}$ ein bijektives $f : V_{\mathcal{K}} \to V_{\mathcal{T}}$ gibt, so dass $\{u_0, \dots, u_r\} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \{f(u_0), \dots, f(u_r)\} \in \mathcal{T}$ gilt.

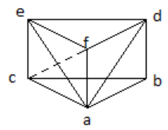
Beweis. Aufgrund der Bijektivität von φ reicht es zu zeigen, dass die von φ^{-1} aufgespannte simpliziale Abbildung $g : |L| \to |K|$ invers zu f ist.
Sei $x = \sum_{i=1}^n b_i(x)u_i$. Dann ist $f(x) = \sum_{i=1}^n b_i(x)\varphi(u_i)$ nach Definition und es gilt

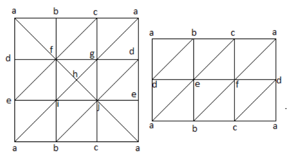
$$g(f(x)) = g(\sum_{i=1}^n b_i(x)\varphi(u_i)) = \sum_{i=1}^n b_i(x)\varphi^{-1}(\varphi(u_i)) = \sum_{i=1}^n b_i(x)u_i = x$$

□

Beispiel 2.14.







Literatur

[1] H. Edelsbrunner, J.L. Harer, *Computational Topology: An Introduction*, AMS, 2009.

[2] J.R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, 1984.

[3] J.R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall, 1975.