Kleinere Mittheilungen.

VIII. Eine Polynomentwickelung.

Es soll $(1+x+x^2+\ldots+x^{m-1})^n$ entwickelt werden, wenn m und n ganze positive Zahlen sind. Wird

$$1)\qquad \left(\sum_{k=0}^{k=m-1} x^k\right)^n = \sum_{k=0}^{k=n(m-1)} a_k x^k$$

gesetzt, so muss eine independente Darstellung für a_k gesucht werden.

1. Man hat

$$\left(\frac{1-x^m}{1-x}\right)^n = \sum_{k=0}^{k=n(m-1)} a_k x^k$$

und mit Hilfe des binomischen Satzes

$$2)\qquad \begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k (n)_k x^{mk} &= \sum_{k=0}^{k=n(m-1)} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k n_k x^k \\ &= \sum_{h=0}^{h=nm} x^h \sum_{k=0}^{k=h} (-1)^{h-k} (n)_{h-k} \cdot a_k, \end{aligned}$$

wenn unter $(n)_k$, wie gewöhnlich, der Ausdruck $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}$ verstanden wird. Ist nun

$$h = mp + q, \quad q \begin{cases} \geqq 0, \\ < m, \end{cases}$$

so folgt aus 2) sofort das System

$$3)\qquad \sum_{k=0}^{k=h} (-1)^k a_k (n)_{h-k} = \begin{cases} 0 \text{ falls } q > 0, \\ (-1)^{p+h}(n)_p \text{ falls } q = 0, \end{cases}$$
$$h = 0, 1, 2, \ldots mn,$$

wo die a_k zu bestimmen sind. Theilen wir hier in Classen von je m Gleichungen ab und untersuchen wir die einzelnen Classen.

Erste Classe: $p = 0$, $h = 0, 1, 2, \ldots (m-1)$;

$$4)\qquad \begin{cases} a_0 & = 1, \\ a_0(n)_1 - a_1 & = 0, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_0(n)_k - a_1(n)_{k-1} + \ldots + (-1)^k a_k & = 0, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_0(n)_{m-1} - a_1(n)_{m-2} + \ldots + (-1)^k a_k (n)_{m-k-1} + \ldots + (-1)^{m-1} a_{m-1} & = 0. \end{cases}$$

Man findet daraus successive

$$a_0 = 1 = (n-1)_0,\quad a_1 = (n)_1,\quad a_2 = (n+1)_2,\quad a_3 = (n+2)_3.$$

Um zu beweisen, dass für die erste Classe allgemein

$$5)\qquad a_k = (n+k-1)_k$$

ist, werde angenommen, diese Identität gelte für die Indices 0, 1, 2, ... $(k-1)$; dann ist a_k zu bestimmen aus der Gleichung

$$6)\qquad \sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^i (n+i-1)_i (n)_{k-i} + (-1)^k a_k = 0.$$

Man findet nun leicht

$$\begin{aligned}(n)_k - (n)_1 (n)_{k-1} \qquad\qquad\qquad &= -(n+1)_k (k-1)_1,\\ (n)_k - (n)_1 (n)_{k-1} + (n+1)_2 (n)_{k-2} &= \quad (n+2)_k (k-1)_2,\end{aligned}$$

was auf die Vermuthung führt, es sei allgemein

$$7)\qquad \sum_{i=0}^{i=r} (-1)^i (n+i-1)_i = (-1)^r (n+r)_k (k-1)_r.$$

Setzt man die Richtigkeit dieses Ausdrucks für die Indices 0, 1, 2, ... r voraus, so hat man

$$\sum_{i=0}^{i=r+1} (-1)^i (n+i-1)_i (n)_{k-i} = (-1)^r (n+r)_k (k-1)_r + (-1)^{r+1} (n+r)_{r+1} (n)_{k-r-1}$$

$$= (-1)^r \frac{(n+r)(n+r-1)\ldots(n+r-k+2)}{(k-r-1)!} \left[\frac{(n+r-k+1)(k-1)_r}{k(k-1)\ldots(k-r)} - \frac{n}{(r+1)!}\right].$$

Der Inhalt der grossen Klammer kann geschrieben werden

$$\frac{(n+r-k+1)(k-1)(k-2)\ldots(k-r)}{k(k-1)\ldots(k-r).r!} - \frac{n}{(r+1)!} = \frac{1}{r!}\left(\frac{n+r-k+1}{k} - \frac{n}{r+1}\right)$$

$$= -\frac{(n+r+1)(k-r-1)}{k.(r+1)!}.$$

Fügt man hier im Zähler und Nenner die Factoren $(k-1)(k-2)\ldots(k-r)$ bei, so entsteht endlich

$$\sum_{i=0}^{i=r+1} (-1)^i (n+i-1)_i (n)_{k-i} = (-1)^{r+1} (n+r+1)_k (k-1)_{r+1},$$

d. h. das, was aus 7) wird, wenn man r durch $r+1$ ersetzt. Die Gleichung 7) gilt demnach allgemein, und man hat dann in 6)

$$8)\qquad (-1)^{k-1} (n+k-1)_k (k-1)_{k-1} + (-1)^k a_k = 0,\quad a_k = (n+k-1)_k$$

allgemein giltig für $k = 0, 1, 2, \ldots (m-1)$.

Zweite Classe: $p = 1,\ h = m, m+1, \ldots 2m-1$;

$$9)\quad \left\{\begin{array}{llll} a_0 (n)_m & - a_1 (n)_{m-1} & + \ldots + (-1)^m & a_m = (-1)^{m-1} (n)_1,\\ a_0 (n)_{m+1} & - a_1 (n)_m & + \ldots + (-1)^{m+1} & a_{m+1} = 0,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_0 (n)_{m+k} & - a_1 (n)_{m+k-1} & + \ldots + (-1)^{m+k} & a_{m+k} = 0,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_0 (n)_{2m-1} & - a_1 (n)_{2m-2} & + \ldots + (-1)^{2m-1} & a_{2m-1} = 0. \end{array}\right.$$

Man sieht sofort, dass, wenn f einen noch zu bestimmenden Factor bedeutet, in Analogie mit 8) die Relation gelten muss

$$a_{m+k}=(n+m+k-1)_{m+k}+(n)_1\cdot f, \quad k=0,1,2,\dots(m-1).$$

Durch directe Ausrechnung mit Hilfe der bei der ersten Classe angestellten Betrachtungen findet man

$$\begin{aligned} a_m &=(n+m-1)_m - (n)_1(n-1)_0, \\ a_{m+1} &=(n+m)_{m+1} - (n)_1(n)_1, \\ a_{m+2} &=(n+m+1)_{m+2}-(n)_1(n+1)_2 \end{aligned}$$

und schliesst daraus, dass allgemein

$$10) \qquad a_{m+k}=(n+m+k-1)_{m+k}-(n)_1(n+k-1)_k$$

zu erwarten ist. Gilt diese Relation für $k=0,1,2,\dots(k-1)$, so hat man zur Bestimmung von a_{m+k} die Gleichung

$$\begin{aligned} a_0(n)_{m+k}-a_1(n)_{m+k-1}+\cdot\;\cdot+(-1)^{m-1}a_{m-1}(n)_{k+1} \\ +(-1)^m a_m(n)_k+(-1)^{m+1}a_{m+1}(n)_{k-1}+\dots+(-1)^{m+k-1}a_{m+k-1}(n)_1 \\ +(-1)^{m+k}a_{m+k}=0. \end{aligned}$$

Hierin liefern die ersten Bestandtheile aller a_h von $h=0$ bis $h=m+k-1$, wie in der ersten Classe, den Werth $(-1)^{m+k-1}(n+m+k-1)_{m+k}$.

Die zweiten Bestandtheile der a_h von $h=m$ bis $h=m+k-1$ liefern gemäss 10)

$$\begin{aligned} -(n)_1[(-1)^m(n)_k+(-1)^{m+1}(n)_1(n)_{k-1}+(-1)^{m+2}(n+1)_2(n)_{k-2}+\dots \\ \dots+(-1)^{m+k-1}(n+k-2)_{k-1}(n)_1] \end{aligned}$$

oder

$$-(-1)^m(n)_1\sum_{i=0}^{i=k-1}(-1)^i(n+i-1)_i(n)_{k-i},$$

d. h. nach 7) den Werth

$$-(-1)^{m+k-1}(n)_1(n+k-1)_k(k-1)_{k-1},$$

so dass endlich entsteht

$$11) \qquad a_{m+k}=(n+m+k-1)_{m+k}-(n)_1(n+k-1)_k.$$

Die Gleichung 10) gilt also allgemein für $k=0,1,2,\dots(m-1)$.

Dritte Classe: $p=2$, $h=2m, 2m+1, \dots 3m-1$.

Die erste Gleichung der dritten Classe lautet

$$a_0(n)_{2m}-a_1(n)_{2m-1}+\dots+a_{2m}=(n)_2.$$

Man findet durch die nämliche Untersuchung, wie in der zweiten Classe, sehr leicht

$$12) \quad a_{2m+k}=(n+2m+k-1)_{2m+k}-(n)_1(n+m+k-1)_{m+k}+(n)_2(n+k-1)_k,$$
$$k=0,1,2,\dots(m-1) \text{ u. s. f.}$$

Die bisherigen Resultate lassen sich in etwas veränderter Gestalt folgendermassen schreiben:

Erste Classe: $k = q \begin{matrix} \geqq 0, \\ < m, \end{matrix}$

$a_q = (n-1+q)_{n-1}$.

Zweite Classe: $k = m + q$,

$a_{m+q} = (n-1+m+q)_{n-1} - (n)_1 (n-1+q)_{n-1}$.

Dritte Classe: $k = 2m + q$,

$a_{2m+q} = (n-1+2m+q)_{n-1} - (n)_1 (n-1+m+q)_{n-1} + (n)_2 (n-1+q)_{n-1}$.

Allgemein hat man also

13) $$a_{pm+q} = \sum_{i=0}^{i=p} (-1)^i (n)_i (n-1+pm+q-mi)_{n-1}$$

oder kürzer

14) $$a_k = \sum_{i=0} (-1)^i (n)_i (n-1+k-mi)_{n-1}.$$

Die Summation bricht von selbst ab, da $(n)_k = 0$ für $n < k$.

Es mag noch bemerkt werden, dass jedenfalls immer

15) $$a_k = a_{n(m-1)-k}$$

sein muss, da das zu potenzirende Polynom reciprok ist.

Schliesslich hat man

16) $$\left(\sum_{k=0}^{k=m-1} x^k\right)^n = \sum_{k=0}^{k=n(m-1)} x^k \sum_{i=0} (-1)^i (n)_i (n-1+k-mi)_{n-1}.$$

2. Ein anderer, vom vorhergehenden wesentlich verschiedener Weg zur Lösung der Aufgabe ist folgender.

Aus 1) ergiebt sich, dass a_k nichts Anderes ist, als die Angabe, wie oft die Summe k aus je n Elementen, welche der Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots (m-1)$ zu entnehmen sind, variationsmässig mit Wiederholungen gebildet werden kann; oder auch:

Es ist a_k die Lösungszahl für die unbestimmte Gleichung

17) $$\sum_{i=1}^{i=n} y_i = k$$

mit den Bedingungen $y_i \begin{matrix} \geqq 0, \\ < m. \end{matrix}$

Bei den unbestimmten Gleichungen wird der Werth Null für die Unbekannten in der Regel ausgeschlossen; wir setzen deshalb

$$y_i = z_i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

und haben uns dann mit der Gleichung

18) $$\sum_{i=1}^{i=n} z_i = n + k$$

und den Bedingungen

$$z_i \begin{matrix} \geqq 1, \\ < m+1 \end{matrix}$$

zu beschäftigen. Bezeichnet man die Anzahl sämmtlicher Lösungen für

$$\sum_{i=1}^{i=n} z_i = u$$

durch $f_n(u)$, so hat man für

$$\begin{array}{lll} z_1 + z_2 & = u & f_2(u) = u - 1, \\ z_1 + z_2 + z_3 & = u & f_3(u) = (u-1)_2, \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 & = u & f_4(u) = (u-1)_3 \end{array}$$

u. s. f.,

d. h. für

19) $$\sum_{i=1}^{i=n} z_i = u \qquad f_n(u) = (u-1)_{n-1}.$$

Es sei nun die Anzahl der Lösungen, in denen p bestimmte z aus der Reihe $z_1, z_2, \ldots z_n$ den Werth m übersteigen, gleich ψ_p, dann ist $\psi_0 = a_k$ und

20) $$f_n(u) = (u-1)_{n-1} = \psi_0 + (n)_1 \psi_1 + (n)_2 \psi_2 + (n)_3 \psi_3 + \ldots$$

Wird nun etwa $z_n = m + \xi_n$ gesetzt, so entsteht die Gleichung

21) $$\sum_{i=1}^{i=n-1} z_i + \xi_n = u - m,$$

deren Lösungszahl $(u-m-1)_{n-1}$ sich zusammensetzt aus $\psi_1, \psi_2, \ldots$ derart, dass

$$(u-m-1)_{n-1} = \psi_1 + (n-1)_1 \psi_2 + (n-1)_2 \psi_3 + \ldots,$$

da es sich jetzt nur noch um $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ handelt. Es ist klar, wie man hier weitergehen kann; man kommt dadurch auf das System

22) $$\left\{\begin{array}{lllll} (u-1)_{n-1} & = \psi_0 + (n_1)\psi_1 + (n_2)\psi_2 & + (n)_3\psi_3 & + \ldots, \\ (u-m-1)_{n-1} & = \qquad \psi_1 + (n-1)_1\psi_2 & + (n-1)_2\psi_3 & + \ldots, \\ (u-2m-1)_{n-1} & = & \psi_2 + (n-2)_1\psi_3 & + \ldots \\ & \text{u. s. f.} & & \end{array}\right.$$

Es werde hier die i^{te} Gleichung mit $(-1)^{i-1}(n)_{i-1}$ multiplicirt und Alles addirt; bemerkt man, dass

$$\sum_{i=0}^{i=h} (-1)^i (n-i)_{h-i} (n)_i = \frac{n!}{h!\,(n-h)!} \sum_{i=0}^{i=h} (-1)^i \frac{h!}{i!\,(h-i)!}$$
$$= (n)_h \sum_{i=0}^{i=h} (-1)^i (h)_i = 0,$$

mit alleiniger Ausnahme des Falles $h=0$, so resultirt, wenn nun für u der Werth $n+k$ eingeführt wird,

23) $$\psi_0 = a_k = \sum_{i=0} (-1)^i (n)_i (n+k-1-mi)_{n-1},$$

genau wie früher.

3. Die Aufgabe findet in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Verwendung.

Es seien n Würfel vorhanden; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit w, mit diesen n Würfeln k Augen zu werfen?

Entwickelt man

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n=\sum_{h=0}^{h=5n} b_h x^{n+h},$$

so hat man als Zahl q der günstigen Fälle den Coefficienten von x^k, d. h.

$$q=b_{k-n}.$$

Man hat nun

$$\left(\sum_{h=0}^{h=5} x^h\right)^n=\sum_{h=0}^{h=5n} b_h x^h=\sum_{h=0}^{h=5n} a_h x^h,$$

also

$$q=a_{k-n},\quad m=6,$$

24) $$q=\sum_{i=0}(-1)^i (n)_i (k-1-6i)_{n-1},$$

oder auch nach der Bemerkung in 15)

$$a_{k-n}=a_{nm-k},$$

25) $$q=\sum_{i=0}(-1)^i (n)_i (7n-k-1-6i)_{n-1}$$

und dann

26) $$w=\frac{q}{6^n}.$$

Beispiel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit 4 Würfeln 19 Augen zu werfen?

$$n=4,\quad k=19,$$

$$q=\sum_{i=0}(-1)^i (4)_i (18-6i)_3=(18)_3-4.(12)_3+6(6)_3=56$$

oder

$$q=\sum_{i=0}(-1)^i (4)_i (8-6i)_3 =(8)_3=56,$$

$$w=\tfrac{56}{1296}.$$

In der That hat man die Combinationen 1666, 2566, 3466, 3556, 4456 und 4555, welche permutirt $4+12+12+12+12+4=56$ Variationen liefern.

Dorpat, 1. November 1880. K. Weihrauch.

IX. Werth einiger doppelt-orthosymmetrischer Determinanten.

Ist

$$C=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix},$$

so hat man für $a_k=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$C=\frac{(-1)^{n-1}n^{n-2}(n+1)(n+2)}{3\,.\,2^{n+1}}\left((n+3)^n-(n+1)^n\right),$$

für $a_k=(k+1)^2$

$$C=\frac{(-1)^{n-1}n^{n-2}(n+1)(2n+1)}{12}\left((n+2)^n-n^n\right),$$

für $a_k=\cos(ka)$

$$C=\left(2\sin\frac{na}{2}\right)^{n-2}\left(\sin^n\left(\frac{na}{2}\right)-\sin^n\left(\frac{n-2}{2}a\right)\right),$$

für $a_k=\sin(ka)$

$$C=(-1)^n\left(2\sin\frac{na}{2}\right)^{n-2}\left(\cos^n\left(\frac{na}{2}\right)-\cos^n\left(\frac{n-2}{2}a\right)\right).$$

Man beweist diese Formeln, indem man in

$$C=\prod_{k=1}^{k=n}\left(\sum_{h=0}^{h=n-1}a_h\alpha_k^h\right),$$

wo α_k eine n^{te} Wurzel der Einheit ist, die Summationen ausführt.

Dorpat, 1. November 1880. K. Weihrauch.

X. Ein Satz vom ebenen Viereck.

(Hierzu Taf. II Fig. 12.)

Sei $\angle adc=\alpha$, $\angle abc=\beta$ (Fig. 12).

Macht man $\angle bce=\angle adb$, $\angle cbe=\angle abd$, so ist

$$\triangle abd\sim\triangle ebc,$$

also

$$ad\,.\,bc=bd\,.\,ce,\quad ab:be=bd:bc,$$

$$\triangle abe\sim\triangle dbc,$$

$$ab\,.\,cd=bd\,.\,ae,$$

$$\angle aec=\begin{cases}\alpha+\beta,\\ 2\pi-(\alpha+\beta),\end{cases}$$

$$ae^2+ce^2-2ae\,.\,ce\,.\cos(aec)=ac^2,$$

$$(ab\,.\,cd)^2+(ad\,.\,bc)^2-2ab\,.\,bc\,.\,cd\,.\,da\,.\cos(\alpha+\beta)=(ac\,.\,bd)^2$$

eine Relation zwischen den vier Seiten, beiden Diagonalen und der Summe zweier Gegenwinkel eines Vierecks.

1. Es sei $\alpha+\beta=\pi$, dann entsteht

$$ab\,.\,cd+bc\,.\,ad=ac\,.\,bd,$$

der Satz des Ptolemaeus.

2. Es sei $\alpha+\beta=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$, so entsteht

$$(ab\,.\,cd)^2+(bc\,.\,ad)^2=(ac\,.\,bd)^2.$$

Betragen also in einem ebenen Viereck zwei Gegenwinkel zusammen einen oder drei Rechte, so ist die Summe der Quadrate der Producte je zweier Gegenseiten gleich dem Quadrat des Products der Diagonalen.

Dieser specielle Satz lässt sich auch folgendermassen beweisen.

Es seien in einer Ebene zwei Dreiecke gegeben, deren Ecken a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3, deren Inhalte d und δ sein mögen; heissen die Radien der ihnen umschriebenen Kreise r und ϱ; ist der Winkel, unter dem sich beide Kreise schneiden, gleich φ, und bezeichnet man die Strecke $a_i b_k$ durch s_{ik}, so existirt nach Siebeck (Crelle's Journal 62, S. 153) die Relation

$$r\varrho\, d\delta \cos\varphi = -\tfrac{1}{32}\begin{vmatrix} s^2_{11} & s^2_{12} & s^2_{13} \\ s^2_{21} & s^2_{22} & s^2_{23} \\ s^2_{31} & s^2_{32} & s^2_{33} \end{vmatrix}.$$

Es falle nun a_2 mit b_2, a_3 mit b_3 zusammen, also $s_{22} = s_{33} = 0$, dann sind $s_{12}, s_{21}, s_{31}, s_{13}$ die vier auf einander folgenden Seiten m, n, p, q, s_{11} und $s_{23} = s_{32}$ die Diagonalen s, t eines Vierecks V. Falls nun die Kreise um die beiden Dreiecke, in welche V etwa durch s_{23} getheilt wird, sich rechtwinklig schneiden, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, was, wie man sich leicht überzeugt, darauf hinausläuft, dass dann die Summe zweier Gegenwinkel in V gleich einem oder drei rechten ist, so hat man zufolge obiger Relation

$$0 = \begin{vmatrix} s^2 & m^2 & q^2 \\ n^2 & o & t^2 \\ p^2 & t^2 & o \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad m^2p^2 + n^2q^2 = s^2t^2.$$

Dorpat, 1. November 1880. K. Weihrauch.

XI. Das Reciprocitätsgesetz.

Im Jahre 1877 theilte mir Herr A. Voigt eine Abkürzung des dritten Gauss'schen Reciprocitätsbeweises mit und sprach die Absicht aus, dieselbe der Oeffentlichkeit zu übergeben. Da derselbe aber, der damals in Stuttgart als Versicherungsbeamter thätig war, bald darauf starb, so ist die Veröffentlichung wohl unterblieben, wenigstens ist mir Nichts davon bekannt geworden, weshalb ich seine Methode hier mittheilen will.

Es seien p und q zwei ungerade Primzahlen, und es sei μ die Anzahl der Reste der Zahlen $q, 2q, 3q, \ldots \frac{1}{2}(p-1)q$ in Bezug auf p, welche grösser als $\frac{1}{2}p$ sind, oder (wenn man die kleinsten positiven und negativen Reste betrachtet) welche negativ sind. Ebenso sei ν die Anzahl der kleinsten Reste der Zahlen $p, 2p, \ldots \frac{1}{2}(q-1)p$ in Bezug auf q, welche grösser als $\frac{1}{2}q$ sind. So ist nach Gauss

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu+\nu}.$$

Soll der Rest von kq nach p negativ sein, so ist

$$(k-\tfrac{1}{2})p < hq < kp,$$

und umgekehrt gehören zu solchen ganzen Zahlen h, welche dieser Bedingung genügen, negative Reste. Da h nicht grösser als $\frac{1}{2}(p-1)$ sein darf, so kann k nicht grösser als $\frac{1}{2}(q-1)$ werden. Die Anzahl der Zahlen h, welche bei gegebenem k die Ungleichung befriedigen, ist $\left[\frac{kp}{q}\right]-\left[\frac{(k-\frac{1}{2})p}{q}\right]$ und mithin ist

$$\mu=\left[\frac{p}{q}\right]-\left[\frac{\frac{1}{2}p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]-\left[\frac{\frac{3}{2}p}{q}\right]+\cdots$$

$$\cdots+\left[\frac{\frac{1}{2}(q-1)}{q}\right]-\left[\frac{\frac{1}{2}(q-2)p}{q}\right]=\sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{sp}{q}\right]-\left[\frac{p}{2}-\frac{sp}{q}\right],$$

$$\mu\equiv\sum_{s}\left[\frac{sp}{q}\right]+\left[\frac{p}{2}-\frac{sp}{q}\right]\quad(\textit{modulo}\ 2).$$

Ist nun der Rest von sp nach q kleiner als $\frac{1}{2}q$, so ist

$$\left[\frac{sp}{q}\right]+\left[\frac{p}{2}-\frac{sp}{q}\right]=\left[\frac{sp}{q}\right]+\left[\frac{p}{2}\right]-\left[\frac{sp}{q}\right]=\frac{p-1}{2}.$$

Ist der Rest grösser als $\frac{1}{2}q$, was ν-mal eintritt, so ist

$$\left[\frac{sp}{q}\right]+\left[\frac{p}{2}-\frac{sp}{q}\right]=\left[\frac{sp}{q}\right]+\left[\frac{p}{2}\right]-\left[\frac{sp}{q}\right]-1=\frac{p-1}{2}-1.$$

Daraus folgt

$$\mu\equiv\sum\left[\frac{sp}{q}\right]+\left[\frac{p}{2}-\frac{sp}{q}\right]=\frac{q-1}{2}.\frac{p-1}{2}-\nu,\quad \mu+\nu\equiv\frac{q-1}{2}\,\frac{p-1}{2},$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}},$$

w. z. b. w.

J. THOMAE.

XII. Eine Eigenschaft concentrischer Ellipsen und Hyperbeln.

(Hierzu Taf. II Fig. 13 u. 14.)

In einer aus den Halbaxen $CA=a$ und $CB=b$ construirten Ellipse (Fig. 13) sei P der Punkt, welcher zu der beliebig gewählten excentrischen Anomalie $ACM=\omega$ gehört, mithin $x=a\cos\omega$, $y=b\sin\omega$; in einer zweiten, aus gleichgerichteten, sonst aber willkürlichen Axen CA_1 und CB_1 construirten Ellipse bedeute P_1 den zu derselben Anomalie gehörenden Punkt; die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte P und P_1 ist dann immer normal zu einer dritten Ellipse $A_2P_2B_2$ und schneidet letztere in einem Punkte P_2, welcher zu derselben Anomalie gehört.

Die dritte Ellipse wird auf folgende Weise construirt. Aus den Seiten CA und CB bilde man das Rechteck $ACBD$, ebenso aus CA_1 und CB_1 das Rechteck $A_1CB_1D_1$ und ziehe DD_1; ferner lege man durch C eine Gerade, welche mit CA denselben Winkel einschliesst, wie DD_1 mit

$D_1 A_1$; diese Gerade schneidet DD_1 in einem Punkte D_2, dessen Projectionen auf die Coordinatenaxen zwei Hauptscheitel der Ellipse $A_2 P_2 B_2$ sind.

Erwähnung verdienen noch die Grenzfälle, in denen CA_2 und CB_2 entweder verschwinden oder unendlich gross werden. Der erste Fall tritt ein für $a_1 : a = b_1 : b$, also bei ähnlichen Ellipsen; die Gerade PP_1 geht dann immer durch den Coordinatenanfang. Der zweite Fall tritt ein für $a_1 - a = b_1 - b$, und zwar wird hier $CA_2 = \infty$, $CB_2 = \infty$, jedoch so, dass $CA_2 - CB_2$ den endlichen Werth $\frac{1}{2}(a-b)$ erhält; bezeichnen U und V die Punkte, in denen PP_1 die Axen schneidet, so ist dann UV constant $= a - b$.

Die angegebenen Sätze gelten mit geringen Modificationen für die Hyperbel, wenn letztere durch die Gleichungen $x = a \sec \omega$, $y = b \tan \omega$ ausgedrückt und ω die excentrische Anomalie genannt wird. Auch hier ist PP_1 normal zu einer dritten Hyperbel $A_2 P_2$ (Fig. 14) und schneidet letztere in einem, gleichfalls der excentrischen Anomalie ω entsprechenden Punkte P_2.*

Für die Construction der Halbaxen CA_2 und CB_2 bleibt die Bemerkung ungestört, dass D_2 in die Gerade DD_1 fällt, nur ist der Winkel $ACD_2 = \angle DD_1 A_1$ auf die entgegengesetzte Seite zu legen, d. h. D_2 ist der Fusspunkt der Senkrechten von C auf DD_1, mithin CD_2 eine Asymptote der dritten Hyperbel.

Für den Fall, dass $a_1 : a = b_1 : b$ ist, verschwinden CA_2 und CB_2; die Gerade PP_2 geht dann immer durch C. Ist $a_1 - a = b_1 - b$, so wird $CA_2 = CB_2$.

Schlömilch.

XIII. Das gleichseitige Hyperboloid.

Herr A. Voigt hat im 86. Bande des Crelle'schen Journals ein Hyperboloid zum Gegenstande seiner Studien gemacht, welches durch drei gegen einander senkrechte windschiefe Gerade definirt ist. Er nennt dasselbe ein gleichseitiges und entwickelt auf synthetischem Wege eine Reihe Eigenschaften, welche manches Interessante bieten. Da seine Methode eine besondere Kraft der räumlichen Anschauung erfordert, so denke ich, wird es Manchem genehm sein, die interessanten Ergebnisse der betreffenden Arbeit, auf einem zweckmässigen Wege analytisch vermittelt, zu erhalten; ich erlaube mir deshalb, die wesentlichsten Eigenschaften des gleichseitigen Hyperboloids hier in Kürze abzuleiten und zum Schluss auf eine Verallgemeinerung hinzuweisen, welche die Besonderheit dieser Fläche in ihrer Beziehung zu einer Eigenthümlichkeit zweier allgemeinen Flächen zweiten Grades hervortreten lässt.

---

* Um die Figur nicht zu überladen, sind ω und die Constructionen von x und y weggelassen worden.

Sind im Raume drei normal gegen einander gerichtete windschiefe Gerade G_1, G_2, G_3 gegeben, so werden die drei Geraden G', G'', G''', welche durch die kürzesten Abstände zwischen jenen bestimmt sind, gleichfalls in dem Hyperboloid enthalten sein, das durch G_1, G_2, G_3 definirt ist. Von diesen sechs Geraden bestimmen je zwei sich schneidende eine Berührungsebene des Hyperboloids und die sechs durch sie bedingten Berührungsebenen begrenzen ein rechtwinkliges Parallelepipedon, welches man als dem Hyperboloid umgeschrieben bezeichnen darf. Man beziehe nunmehr das Hyperboloid auf ein rechtwinkliges Axensystem, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt des Parallelepipedons gelegen ist und dessen Axenrichtungen den Kanten desselben parallel laufen. Die Länge der Kanten in der x-, y-, z-Richtung mögen durch 2α, 2β, 2γ gemessen sein.

Da je zwei Gegenebenen Berührungsebenen des Hyperboloids sind, so muss, da ihr Durchschnitt im Unendlichen liegt, die Gerade, welche ihre Berührungspunkte verbindet, ein Durchmesser des Hyperboloids sein, denn sie ist die jenem Durchschnitt polarisch zugeordnete Gerade. Es muss deshalb der Mittelpunkt des Parallelepipedons mit dem Mittelpunkte des Hyperboloids zusammenfallen, und die Gleichung desselben kann die Glieder nicht enthalten, welche linear in x, y, z sind. Denkt man die Gleichung nach Potenzen von z geordnet, so folgt, da sie für $x=\alpha$, $y=\beta$ und jedes z erfüllt werden muss, dass das Glied mit z^2 für das Axensystem verschwindet. Dasselbe gilt für die Glieder, welche x^2 und y^2 enthalten. Die Gleichung des Hyperboloids hat also die Form

$$Axy+Byz+Czx+D=0.$$

Diese Gleichung muss für $x=\alpha$, $y=\beta$ und jedes z erfüllt werden, was die Bedingung liefert

$$1)\qquad A\alpha\beta+D=0.$$

Sie muss ferner befriedigt werden für $y=-\beta$, $z=\gamma$ und jedes x, was zur Folge hat

$$2)\qquad -B\beta\gamma+D=0.$$

Drittens endlich muss ihr Genüge geschehen durch $x=\alpha$, $z=\gamma$ und jedes y, und dies erfordert

$$3)\qquad C\alpha\gamma+D=0.$$

Substituirt man aus diesen drei Gleichungen die Werthe für A, B, C in obige Gleichungsform, so hebt sich D heraus und die Gleichung des Hyperboloids nimmt die Gestalt an

$$xy\gamma-yz\alpha+zx\beta-\alpha\beta\gamma=0.$$

Stellt man sich die Frage, ob diese Gleichung durch eine orthogonale Substitution für x, y, z in eine Gleichung von derselben Form transformirbar ist, so entwickelt man folgende Bedingungen. Sei die orthogonale Substitution ausgedrückt durch

$$x=\xi\lambda+\eta\mu+\zeta\nu,\quad y=\xi\lambda'+\eta\mu'+\zeta\nu',\quad z=\xi\lambda''+\eta\mu''+\zeta\nu'',$$

so müssen aus der Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}(\xi\lambda+\eta\mu+\zeta\nu)(\xi\lambda'+\eta\mu'+\zeta\nu')\gamma\\ -(\xi\lambda'+\eta\mu'+\zeta\nu')(\xi\lambda''+\eta\mu''+\zeta\nu'')\alpha\\ +(\xi\lambda''+\eta\mu''+\zeta\nu'')(\xi\lambda+\eta\mu+\zeta\nu)\beta\end{array}\right\}-\alpha\beta\gamma=0$$

die Coefficienten von ξ^2, η^2, ζ^2 verschwinden. Dies erfordert

$$\text{I)}\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda\lambda'\gamma-\lambda'\lambda''\alpha+\lambda''\lambda\beta=0,\\ \mu\mu'\gamma-\mu'\mu''\alpha+\mu''\mu\beta=0,\\ \nu\nu'\gamma-\nu'\nu''\alpha+\nu''\nu\beta=0.\end{array}\right.$$

Die Summe dieser drei Gleichungen giebt eine Identität, sie setzen deshalb nur zwei Bedingungen fest zwischen den neuen Substitutionscoefficienten. Da diese ausserdem noch durch die bekannten sechs Gleichungen, welche die Orthogonalität ausdrücken, verknüpft sind, so bleibt noch eine Variabilität in den Substitutionscoefficienten, d. h. durch unendlich viele orthogonale Substitutionen ist obige Gleichung des Hyperboloids in eine Gleichung derselben Form transformirbar. Ersetzt man in dem Gleichungssystem I) die λ, λ', λ'' durch $\frac{x}{\varrho}$, $\frac{y}{\varrho}$, $\frac{z}{\varrho}$, wo ϱ irgend einen beliebigen Vector auf der ξ-Axe anzeigt, so giebt die erste Bedingungsgleichung

$$xy\gamma-yz\alpha+zx\beta=0,$$

und diese drückt aus, dass die ξ-Axe in dem Asymptotenkegel des Hyperboloids enthalten ist. Dasselbe gilt für die η- und ζ-Axe.

Zu jeder Kegelkante ξ giebt es immer ein reelles Paar Kanten η, ζ. Man erkennt dies leicht durch folgende Betrachtung. Schneidet man den Asymptotenkegel, welcher auch die x-, y-, z-Axe enthält, durch eine Ebene in einer Ellipse, so liegen die Durchschnittspunkte x', y', z' der Axen in dieser Ellipse. Dreht man das System um die x-Axe, so durchlaufen die Punkte y', z' eine elliptische Involution. Setzt man daher die Drehung fort, bis die ξ-Axe in eine jener Coordinatenebenen fällt, so müssen die Punkte η', ζ', in welchen die η-, ζ-Axe die Schnittebene treffen, in einer Geraden liegen, welche die Ellipse reell schneidet. Es müssen also auch die η- und ζ-Axe reell in dem Asymptotenkegel enthalten sein. Es lässt sich daher das Ergebniss der Analyse so zusammenfassen:

Lässt sich einem Hyperboloid ein rechtwinkliges Parallelepipedon so umschreiben, dass seine Seitenflächen dasselbe berühren, so giebt es eine unendliche Anzahl solcher rechtwinkliger Parallelepipeda, welche in demselben Sinne dem Hyperboloid umgeschrieben sind.

Die interessanten Relationen zwischen dieser Schaar rechtwinkliger Parallelepipeda, welche Herr A. Voigt aufgestellt hat, gewinnt man schnell durch folgenden Gedankengang. Wird die Form $U=xy\gamma-yz\alpha+zx\beta-\alpha\beta\gamma$ durch eine orthogonale Substitution in $U'=\xi\eta\gamma'-\eta\zeta\alpha'$

$+\zeta\xi\beta'-\alpha'\beta'\gamma'$ transformirt, so geht gleichzeitig ein Ausdruck von der Form $S=x^2+y^2+z^2$ in $S'=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ über; es wird sich also $U+\varkappa S$ in $U'+\varkappa S'$ umbilden. Wird für $\varkappa$ ein solcher Werth gewählt, dass $U+\varkappa S=0$ sich in einen Kegel auflöst, so löst sich für denselben Werth auch $U'+\varkappa S'=0$ in einen solchen auf. Es muss demnach die Discriminante beider Formen dieselben Werthe für $\varkappa$ ergeben oder beide Discriminanten müssen identisch gleich sein. Da nun

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\varkappa\frac{\partial S}{\partial x}=\quad y\gamma+z\beta+2\varkappa x,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}+\varkappa\frac{\partial S}{\partial y}=\quad x\gamma-z\alpha+2\varkappa y,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}+\varkappa\frac{\partial S}{\partial z}=-y\alpha+x\beta+2\varkappa z,$$

so ist die Discriminante

$$\begin{vmatrix} 2\varkappa & \gamma & \beta \\ \gamma & 2\varkappa & -\alpha \\ \beta & -\alpha & 2\varkappa \end{vmatrix}=0$$

oder nach Auflösung der Determinante und Reduction

$$4\varkappa^3-\varkappa(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\alpha\beta\gamma=0.$$

Da diese Gleichung dieselben Wurzeln hat, als

$$4\varkappa^3-\varkappa(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-\alpha'\beta'\gamma'=0,$$

so ist

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2,\quad \alpha\beta\gamma=\alpha'\beta'\gamma'.$$

Die Interpretation dieser Gleichungen zeigt:

„Die Ecken der rechtwinkligen Parallelepipeda, welche sich einem gleichseitigen Hyperboloid umschreiben lassen, liegen auf einer mit ihm concentrischen Kugel und haben unter einander gleiches Volumen."

Um die Beziehung zwischen den Halbaxen eines gleichseitigen Hyperboloids zu gewinnen, welche die besondere Natur desselben ausprägt, gehe man zurück auf die obige orthogonale Substitution und verlange, dass die Gleichung in ξ, η, ζ dies Hyperboloid auf die Axen bezogen darstelle. Es sind dieser Forderung gemäss ausser der Constanten nur die Glieder ξ^2, η^2, ζ^2 in der Gleichung enthalten, und die Coefficienten derselben stellen die Werthe $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $-\frac{1}{c^2}$ dar, wenn a, b, c die Halbaxen bedeuten. Es ist demnach

$$\frac{\lambda\lambda'\gamma-\lambda'\lambda''\alpha+\lambda''\lambda\beta}{\alpha\beta\gamma}=\quad\frac{1}{a^2},$$

$$\frac{\mu\mu'\gamma-\mu'\mu''\alpha+\mu''\mu\beta}{\alpha\beta\gamma}=\quad\frac{1}{b^2},$$

$$\frac{\nu\nu'\gamma-\nu'\nu''\alpha+\nu''\nu\beta}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{1}{c^2}.$$

Die Addition dieser Gleichungen ergiebt

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0.$$

Um die Axen in ihrem Zusammenhange mit α, β, γ und dem Radius der Kugel r, auf der die Ecken der rechtwinkligen Parallelepipeda gelegen sind, darzustellen, transformire man die Form $U=xy\gamma-yz\alpha+zx\beta-\alpha\beta\gamma$ durch eine orthogonale Substitution in die Form $V'=\xi^2P+\eta^2Q+\zeta^2R-\alpha\beta\gamma$, und bestimme P, Q, R durch eine der obigen entsprechende Methode. Wenn S und S' die obige Bedeutung haben, so muss sich $U+\varkappa S$ in $V'+\varkappa S'$ umbilden und es müssen die Discriminanten beider Formen dieselben Wurzeln $\varkappa$ ergeben. Die Discriminante der ersten Form ist oben gebildet. Die Discriminante der zweiten Form ist die Eliminationsresultante aus

$$\frac{\partial V'}{\partial\xi}+\varkappa\frac{\partial S'}{\partial\xi}=2P\xi+2\varkappa\xi=0,$$
$$\frac{\partial V'}{\partial\eta}+\varkappa\frac{\partial S'}{\partial\eta}=2Q\eta+2\varkappa\eta=0,$$
$$\frac{\partial V'}{\partial\zeta}+\varkappa\frac{\partial S'}{\partial\zeta}=2R\zeta+2\varkappa\zeta=0,$$

also die cubische Gleichung $(P+\varkappa)(Q+\varkappa)(R+\varkappa)=0$ oder

$$\varkappa^3+\varkappa^2(P+Q+R)+\varkappa(PQ+QR+RP)+PQR=0.$$

Da diese Gleichung dieselben Wurzeln liefern muss, als die Gleichung

$$4\varkappa^3-\varkappa(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\alpha\beta\gamma=0,$$

so folgt

$$P+Q+R=0,\quad 4(PQ+QR+RP)=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),\quad 4PQR=-\alpha\beta\gamma.$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{P}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{a^2}$, $\frac{Q}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{b^2}$, $\frac{R}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{1}{c^2}$ ist, so ist

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0,\quad \frac{1}{a^2b^2}-\frac{1}{b^2c^2}-\frac{1}{c^2a^2}=-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4\alpha\beta\gamma},\quad \frac{1}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

oder in anderer Form

$$a^2+b^2-c^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=r^2,\quad abc=2\alpha\beta\gamma,\quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0.$$

Herr Voigt bemerkt, dass jedes Hyperboloid, welches durch die Höhen eines Tetraeders bestimmt ist, ein Hyperboloid obiger Art ist. In der That, projicirt man die drei Höhen des Tetraeders $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ senkrecht auf die Grundfläche abc, so sind die Projectionen Höhen im Grunddreieck und treffen sich im Höhenschnitt. Die Normale in diesem schneidet jene drei Höhen und die vierte $d\delta$ im Unendlichen, trifft also alle vier Höhen des Tetraeders. Dasselbe gilt von den Normalen in den Höhenschnitten der übrigen Seitendreiecke. Diese liegen also mit den Höhen in einem Hyperboloid, und zwar schneidet dieses jede Seitenfläche in ihren Ecken und ihrem Höhenschnitt. Der Durchschnitt ist demnach eine gleichseitige Hyperbel.* Schneidet man das Hyperboloid durch eine Ebene, welche die Höhe $d\delta$ enthält und parallel einer Asymptote der gleichseitigen Hyperbel läuft, die in der Grundfläche abc auftritt, so muss diese das Hyperboloid in einer zweiten Geraden G_1 schneiden, welche jener Asymptote parallel läuft, also senkrecht die betrachtete Höhe, die nunmehr mit G' bezeichnet werden mag, durchschneidet. Hätte man die andere Asymptote berücksichtigt, so wäre man auf eine Gerade G_2 geführt worden, welche die Höhe G' gleichfalls senkrecht durchsetzt. Eine Ebene, welche G_1 enthält und parallel G_2 läuft, schneidet das Hyperboloid in einer Geraden G'', welche G_2 parallel läuft, also senkrecht gegen G' gerichtet ist, und eine Ebene, die G_2 in sich schliesst und parallel G_1 ist, schneidet das Hyperboloid in einer Geraden G''', die parallel G_1 liegt, also gegen G' senkrechte Richtung hat. Es sind also die drei Geraden G', G'', G''' derselben Schaar angehörig und normal gegen einander gestellt; es muss demnach das betreffende Hyperboloid gleichseitig sein.

---

* Dass alle Hyperbeln, welche durch die Eckpunkte eines Dreiecks und durch den Höhenschnitt desselben gehen, gleichseitige Hyperbeln sind, dafür habe ich einst bei Steiner in einer Vorlesung einen recht eleganten Beweis gehört. Da ich vermuthe, dass derselbe weiteren Kreisen kaum bekannt geworden sein wird, so erlaube ich mir, ihn hier kurz zu skizziren. Zwei Büschel a und b können durch jede Gerade in der Ebene projectivisch auf einander bezogen werden. Durch Drehung derselben erwächst aus jeder Geraden ein Kegelschnitt durch a und b. Das Mass der Drehung kann durch einen beliebigen Punkt γ bestimmt werden, indem man festsetzt, dass die Strahlen $a\gamma$ und $b\gamma$ in die gemeinsame Gerade ab nach der Drehung fallen. Der Spiegelpunkt von γ gegen die Gerade ab, der Punkt c, sowie die Punkte a und b werden demnach Punkte jedes Kegelschnitts werden, der aus irgend einer Geraden der Ebene hervorgeht. Der Kreis durch $a\gamma b$ zeigt bei der Drehung eine bemerkenswerthe Singularität; es entweichen nämlich alle Punkte x auf dem Bogen $\widehat{ab}$, auf dem γ nicht liegt, bei der Drehung in das Unendliche. Denn das Viereck $xa\gamma b$ bleibt bei der Drehung stets ein Kreisviereck, da sich in ihm die Winkel bei a und b nicht ändern; es muss also, da der Winkel $\gamma = \pi$ wird, der Winkel $x = 0$ werden. Ebenso leicht überzeugt man sich, dass der Mittelpunkt des Drehkreises in einen Punkt d übergeht, der zu a, b, c so gelegen ist, dass jeder der Höhenschnitt ist von dem Dreieck, was durch die drei anderen gebildet wird. Jede Gerade, welche den Drehkreis in den Punkten y und z schneidet, entfaltet sich nach der Drehung zu einer Hyperbel, jede Gerade, welche ihn berührt, zu einer Parabel, und jede Gerade, welche ihn nicht schneidet, zu einer Ellipse. Der Winkel yaz misst den Asymptotenwinkel der Hyperbel. Soll derselbe ein rechter sein, so muss die Gerade, aus der die Hyperbel entspringt, durch den Mittelpunkt des Drehkreises gehen, und jede Gerade, welche durch ihn hindurchgeht, entwickelt sich zu einer gleichseitigen Hyperbel. Also sind alle Hyperbeln, welche durch solche vier Punkte gehen, von denen jeder der Höhenschnitt des durch die drei anderen bestimmten Dreiecks ist, gleichseitige Hyperbeln. Auch erkennt man aus diesem Gedankengange leicht, dass, wenn drei Punkte a, b, c auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen, der Höhenschnitt des von ihnen gebildeten Dreiecks gleichfalls in der gleichseitigen Hyperbel enthalten ist.

Ebenso würde man, wie es Herr Voigt gethan, leicht entwickeln, dass vier Erzeugende einer Schaar eines gleichseitigen Hyperboloids stets als Höhen eines Tetraeders aufgefasst werden können.

Um diejenige allgemeine Eigenschaft von Flächen zweiten Grades zu kennzeichnen, die jene besondere des gleichseitigen Hyperboloids in ihrem Keime enthält, verwende ich eine Methode, die sich häufig mit Erfolg bei derartigen Generalisationen verwenden lässt.

Denkt man den Raum durch Gerade parallel der z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems durchsetzt, so markirt jedes räumliche Gebilde auf diesen Geraden gewisse Punkte. Hält man jeden derselben in der Vorstellung auf seiner Geraden fest, verschiebt aber das ganze System, ohne den Parallelismus zu ändern, so dass das ganze Coordinatensystem in ein gewöhnliches schiefwinkliges $x'y'z'$ übergeht, so transformirt sich das räumliche Gebilde. Bei dieser Transformation würde der Würfel ($x=1$, $y=1$, $z=1$) in ein Rhomboeder ($x'=1$, $y'=1$, $z'=1$) übergehen, und umgekehrt könnte dieses die Transformation kennzeichnen. Das transformirte Gebilde steht mit jenem in der Verwandtschaft der Affinität; es ändern sich nicht die Strecken, welche parallel den Axen laufen; es bewahren parallele Gerade im Raume ihren Parallelismus, die Proportionalität auf parallelen Geraden erhält sich und gleiche Volumina gehen in gleiche Volumina über. Demgemäss verwandelt sich eine Kugel in ein Ellipsoid, je drei senkrecht auf einander stehende Durchmesser der Kugel gehen in ein Tripel von conjugirten Durchmessern des Ellipsoids über und ein gleichseitiges Hyperboloid bildet sich in ein beliebiges Hyperboloid um. Rückwärts lässt sich jedes Hyperboloid durch geeignete Verschiebung in ein gleichseitiges verwandeln; denn legt man parallel drei beliebigen Erzeugenden einer Schaar die Axen x', y', z', so lassen sich diese in drei senkrecht gegen einander gerichtete x, y, z zurückverschieben, und das transformirte Hyperboloid muss gleichseitig werden.

Sind G_1, G_2, G_3 drei beliebige Erzeugende einer Schaar des Hyperboloids, so muss jede Ebene, welche eine von diesen enthält und parallel einer zweiten läuft, das Hyperboloid in einer Geraden schneiden, welche zwei durchschneidet und der dritten parallel läuft. Dadurch entstehen drei neue Gerade der zweiten Schaar G', G'', G''', welche mit jenen ein Parallelepipedon bestimmen. Dieses ist dem Hyperboloid in dem Sinne umgeschrieben, dass jede Seitenfläche Tangentialebene an ihm ist. Legt man durch die Ecken dieses Parallelepipedons irgend eines der möglichen Ellipsoide, so sind für dieses die Richtungen der Kanten drei conjugirte Richtungen. Führt man dieses durch Verschiebung in eine Kugel über, so stellen sich die drei conjugirten Richtungen normal zu einander und das Hyperboloid bildet sich in ein gleichseitiges um. Berücksichtigt man nun jene Eigenschaft des gleichseitigen Hyperboloids und erwägt, dass gleiche Volumina sich in gleiche Volumina transformiren, so lässt sich das Theorem aussprechen:

Ist ein Parallelepipedon einem Ellipsoid eingezeichnet und zugleich einem Hyperboloid umgezeichnet, so giebt es eine ganze Schaar Parallelepipeda, welche der einen Fläche ein- und der andern umgezeichnet sind, und alle diese Parallelepipeda haben gleiches Volumen.

Berlin. Dr. Ad. Schumann.

XIV. Eigenschaften der Lemniscate.

Für die Lemniscate $\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi = b^2 \cos 2\varphi$ lassen sich, wie für die Kegelschnitte, mit denen dieselbe in gewissem Sinne verwandt ist, einfache Sätze aufstellen, von denen — unter Beibehaltung der bei den Kegelschnitten giltigen Nomenclatur — einige der interessanteren hier ausgesprochen werden mögen.

Mittelstrahl und Brennstrahlen. Für jeden Lemniscatenpunkt ist die Summe der Brennstrahlen gleich der Projection der Axe $2b$ auf den Mittelstrahl. Zieht man also durch den Mittelpunkt gerade Linien und fällt auf sie von den Scheiteln Perpendikel, so schneiden die mit den abgegrenzten Stücken als grosser Axe beschriebenen, der Lemniscate confocalen Ellipsen das Geradenbüschel in Punkten der Lemniscate. — Zieht man zu einem Brennstrahl durch den benachbarten Scheitel eine Parallele, so schneidet diese auf dem Mittelstrahl ein Stück ab, das der Differenz der Brennstrahlen gleich kommt. — Trägt man im Mittelpunkte an einen Mittelstrahl einen rechten Winkel, im Curvenpunkte dagegen den halben Winkel der dort sich treffenden Brennstrahlen an, so ist die Hypotenuse des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks gleich der Halbaxe. — Die auf den zwei Brennstrahlen in den Brennpunkten errichteten Perpendikel schneiden auf der Halbirungslinie des Winkels der Brennstrahlen die Focalentfernung $2a$ aus. — Die Halbirungslinie des Winkels zweier Brennstrahlen bildet mit dem zugehörigen Mittelstrahl und der Axe ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis der Mittelstrahl; sie schneidet also die Axe unter doppelt so grossem Winkel, wie der Mittelstrahl. Umgekehrt liegen die Spitzen aller Dreiecke über derselben Basis, für welche die Mittellinien von diesen Spitzen aus gegen die von ebenda auslaufenden Winkelhalbirungslinien und die feste Basis gleich geneigt sind, auf der Lemniscate, deren Brennpunkte die Ecken der Basis sind.

Scheitelstrahlen. Das aus zwei Scheitelstrahlen als Katheten construirte rechtwinklige Dreieck hat die Summe der Brennstrahlen zur Hypotenuse. — Die Differenz der Quadrate zweier Scheitelstrahlen steht zur Differenz der Quadrate der Brennstrahlen in constantem Verhältniss, nämlich wie $\sqrt{2}:1$, d. h. wie Halbaxe b und Excentricität a. — Der Unterschied der Winkel, den ein Mittelstrahl mit den beiden zugehörigen

Scheitelstrahlen bildet, ist ein rechter. — Die Halbirungslinie des Winkels zweier Scheitelstrahlen schneidet den Mittelstrahl stets unter 45^0.

Tangente und Normale. Aus der Thatsache, dass die Normale in einem Curvenpunkte die Axe unter dreifach so grossem Winkel schneidet, wie der zugehörige Mittelstrahl, resultirt in Verbindung mit dem Vorhergehenden: Die Winkelhalbirungslinie des Winkels zweier Brennstrahlen ist zugleich die des Winkels zwischen Mittelstrahl und Normale. Eine Lemniscate und eine ihr confocale Ellipse schneiden sich daher unter dem nämlichen Winkel, wie der nach dem Schnittpunkte führende Mittelstrahl und die Axe. Durch den Schnittpunkt geht noch eine Ellipse, deren Brennpunkte der Lemniscatenmittelpunkt und der Schnittpunkt der Normalen und Axe sind; diese Ellipse berührt die vorige. — In jedem Curvenpunkte bildet der Mittelstrahl mit dem einen Brennstrahl denselben Winkel, wie die Normale mit dem andern. — Die in den Brennpunkten auf den zwei Brennstrahlen nach einem Punkte errichteten Senkrechten schneiden zu beiden Seiten des Punktes gleiche Stücke auf seiner Tangente ab. — Verlängert man den einen Brennstrahl nach einem Punkte über diesen hinaus um sich selbst, so schneidet die in dem Endpunkte errichtete Senkrechte jene im andern Brennpunkte auf den von ihm ausgehenden Brennstrahl errichtete in einem Punkte der Tangente. (Vergl. Cantor, diese Zeitschr., Bd. 12 S. 428—430.) — Die Neigungswinkel zweier Scheitelstrahlen nach einem Punkte und der Axe sind zusammengenommen dem stumpfen Winkel zwischen der Tangente und dem Mittelstrahl des betreffenden Punktes gleich.

Krümmungsradius. Der Winkel zweier Tangenten ist dreimal so gross, als der Winkel der nach ihren Berührungspunkten zielenden Mittelstrahlen; der eine ist also zugleich mit dem andern constant. Der Contingenzwinkel zweier Tangenten ist somit das Dreifache des der unendlich benachbarten Mittelstrahlen nach den Berührungspunkten. — Das Rechteck aus dem Krümmungsradius und Mittelstrahl ist für jeden Curvenpunkt constant dem Quadrat des Radius jenes Kreises gleich, der dem aus der Halbaxe gebildeten gleichseitigen Dreieck umschrieben ist. — Errichtet man im Mittelpunkte ein Perpendikel auf dem nach einem Punkte führenden Mittelstrahl, so schneidet dieses auf der Normalen den dreifachen Krümmungshalbmesser für den Punkt aus.

Lemniscatensector. Die Senkrechte von einem Brennpunkt auf einen Mittelstrahl halbirt den von diesem und der Axe gebildeten Flächensector. — Das Rechteck aus den zwei Scheitelstrahlen eines Punktes ist das Vierfache des von dem Mittelstrahl dieses Punktes und der Axe begrenzten Sectors.

Besondere Punkte. Als solche heben wir den Punkt hervor, der von der Axe am weitesten absteht, und den Berührungspunkt der von einem Brennpunkt an den andern Lemniscatenzweig gehenden Tangente, weil für beide Punkte die vorangehenden Sätze sich bedeutend modificiren.

München. Dr. Wilhelm Hess.