

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1967

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN243919689_0226

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN243919689_0226 | LOG_0012

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Reziprozitätsgesetze für Gitterpunktsummen

Von *Klaus Burde* in Göttingen

Inhalt

Einleitung

Verzeichnis einiger Symbole

§ 1. Definition der Gitterpunktsummen R und S

§ 2. Das Transformationsverhalten der Summen R und S

§ 3. Die Summen S als Funktionen auf $\Gamma(2)$

§ 4. Beziehungen zwischen der Rademacherschen Φ -Funktion und den Summen S auf $\Gamma(2)$

§ 5. Ausdehnung einiger Ergebnisse der §§ 3 und 4 auf ganz Γ

§ 6. Der Zusammenhang der Gitterpunktsummen S und R mit den Dedekindschen Summen

§ 7. Bestimmung der Summen R und S mod 4 und ihr Zusammenhang mit den quadratischen Resten

Literaturverzeichnis

Einleitung

Durch eine funktionentheoretische Untersuchung des Transformationsverhaltens des Logarithmus der Weierstraßschen σ -Funktionen gegenüber Modulusubstitutionen aus der Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(2)$ gewinnt W. Maak [4] Funktionalgleichungen auf $\Gamma(2)$ der Rademacherschen Φ -Funktion [6], in denen gewisse Punktzahlen aus dem durch die Perioden ω_1 und ω_2 der σ -Funktion aufgespannten Punktgitter auftreten. In [5] werden diese „Gitterpunktsummen“ — wir bezeichnen sie wie in [5] mit R und S —, die zu ganz-rationalen, teilerfremden Zahlenpaaren u, v auf elementare Weise erklärt werden können:

$$R(u, v) = S(u, v); \quad (u, v) = 1,$$

funktionentheoretisch untersucht, wobei sie als Funktionen der Elemente von $\Gamma(2)$ aufgefaßt werden:

$$(I) \quad \begin{array}{l} S(a, b) = S_1(L), \quad S(b, a) = S_2(L) \\ S(c, d) = S_3(L), \quad S(d, c) = S_4(L) \end{array}; \quad L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2)$$

und entsprechend für R .

Dabei ergeben sich einfache Beziehungen zwischen diesen Summen. Ihr schon in [4] festgestellter Zusammenhang mit der Rademacherschen Φ -Funktion führt zu einer Darstellung der Φ -Funktion auf $\Gamma(2)$ durch die Funktionen (I).

Die elementare Natur sowohl der Summen R und S selbst als auch der sich ergebenden Sätze legt eine elementare Behandlung nahe, die in der vorliegenden Arbeit gegeben wird. Auch hier werden R und S hauptsächlich als Funktionen auf $\Gamma(2)$ betrachtet. Die angewandte Methode zur Gewinnung auf ganz $\Gamma(2)$ gültiger Beziehungen der Summen untereinander (§ 3) sowie zur Rademacherschen Φ -Funktion (§ 4) beruht auf der Kenntnis des Verhaltens der Φ -Funktion gegenüber Modulusubstitutionen sowie der Möglichkeit, das Transformationsverhalten der Funktionen (I) gegenüber den erzeugenden Substitutionen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ von $\Gamma(2)$, d. h. das Verhalten von $R(u, v)$ und $S(u, v)$ gegenüber den Übergängen

$$u, v \rightarrow u, v + 2u; \quad u, v \rightarrow u + 2v, v; \quad (u, v) = 1$$

allein aus ihrer Definition zu berechnen.

Die Gleichheit zweier Funktionen auf ganz $\Gamma(2)$ wird gezeigt, indem sie für ein spezielles Element von $\Gamma(2)$ verifiziert wird und gleiches Transformationsverhalten beider Funktionen gegenüber den erzeugenden Substitutionen nachgewiesen wird.

In § 2 wird nun allgemeiner das Verhalten von $R(u, v)$ und $S(u, v)$ gegenüber den Übergängen

$$u, v \rightarrow u, v + u; \quad u, v \rightarrow u + v, v; \quad (u, v) = 1$$

berechnet.

Damit ist die Möglichkeit gegeben, die Betrachtungen auf die ganze Modulgruppe auszudehnen, was in § 5 für einige Ergebnisse durchgeführt wird.

Bei der Untersuchung der Summen R und S als Funktionen auf $\Gamma(2)$ zeigt sich, daß alle vier Funktionen (I) in durchsichtiger, sie ebenfalls definierender Beziehung zu der Produktdarstellung von L durch die Erzeugenden A und B stehen. Dadurch gewinnt auch die Darstellung der Φ -Funktion auf $\Gamma(2)$ durch diese Funktionen an Interesse.

Über die Φ -Funktion, die ja im wesentlichen eine ganzzahlig gemachte Dedekindsumme ist [6], besteht ein Zusammenhang von R und S mit den Dedekindschen Summen, der sich bereits in den Definitionen erkennen läßt.

Den Summen R und S liegen nämlich spezielle Streckenzüge zugrunde, die man, bei geeigneter geometrischer Interpretation auch den Dedekindsummen zuordnen kann (§ 6).

Da in Kongruenzen für Dedekindsummen gelegentlich Jacobisymbole auftreten, ist auch ein entsprechender Zusammenhang dieser Symbole mit R und S zu erwarten. Eine solche Beziehung, nämlich eine Kongruenz mod 4, ergibt sich durch eine geeignete geometrische Darstellung des verallgemeinerten Gaußschen Lemmas direkt aus der Definition von R und S (§ 7). Das Gaußsche Reziprozitätsgesetz erweist sich als äquivalent mit einer Kongruenz mod 4 für die Summen S .

Bei der vorliegenden Arbeit handelt es sich im wesentlichen um eine geraffte Fassung meiner Dissertation [1].

Neu hinzugekommen sind der § 5, der die Erweiterung einiger Ergebnisse auf die volle Modulgruppe enthält, und der erste Teil des § 6, der den Zusammenhang der Summen R und S mit der von H. Rademacher und A. Whiteman gegebenen Theorie der Dedekindsummen [7] behandelt.

Verzeichnis einiger Symbole

Elemente der Modulgruppe Γ :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vorzeichenoperator:

$$\text{sig } x = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x = 0; \text{ sig } L = \frac{1}{2} \text{ sig } c (\text{sig } a - \text{sig } d) \text{ für } L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \\ -1, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$[x]$: größte ganze Zahl $\leq x$.

§ 1. Definition der Gitterpunktsummen R und S

Die Punkte der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten x, y bilden ein Punktgitter. Zwei Punkte dieses Gitters nennen wir äquivalent, wenn sowohl ihre x -Koordinaten als auch ihre y -Koordinaten kongruent mod 2 sind.

Durch diese Äquivalenzrelation werden die Gitterpunkte in vier Klassen eingeteilt, als deren Repräsentanten wir die Punkte $(0/0)$, $(0/1)$, $(1/0)$ und $(1/1)$ wählen können. Die Punkte aus den entsprechenden Klassen bezeichnen wir mit P^{00} , P^{01} , P^{10} , P^{11} .

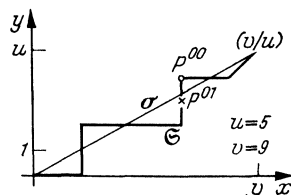
u, v sei ein Paar ganzzahlgewisser, teilerfremder Zahlen. Wir verbinden den Punkt $(v/u)^1$ mit dem Nullpunkt einerseits durch eine Strecke $\sigma(u, v)$, andererseits durch einen Streckenzug $\mathfrak{S}(u, v)$, der sich aus $\left(\left[\frac{|u|}{2}\right] + \left[\frac{|v|}{2}\right]\right)$ zu den Achsen parallelen Strecken der Länge zwei sowie der Verbindungsstrecke der Punkte $\left(2\left[\frac{v}{2}\right] / 2\left[\frac{u}{2}\right]\right)$ und (v/u) zusammensetzt. Durch die Forderung, daß \mathfrak{S} und σ zusammen keine Gitterpunkte umschließen sollen, ist \mathfrak{S} eindeutig bestimmt.

Auf \mathfrak{S} liegen Gitterpunkte P . Wir setzen $\text{sig } P = 1$, wenn P „oberhalb“ von σ liegt, $\text{sig } P = -1$, wenn P „unterhalb“ von σ liegt und $\text{sig } P = 0$, wenn P auf σ liegt, genauer:

$$\text{sig } P = \begin{cases} 1, & \text{wenn man } \sigma \text{ durch eine kleine}^2) \text{ positive Drehung um } 0 \text{ mit } P \text{ zur} \\ & \text{Deckung bringen kann,} \\ -1, & \text{wenn man } \sigma \text{ durch eine kleine negative Drehung um } 0 \text{ mit } P \text{ zur} \\ & \text{Deckung bringen kann,} \\ 0, & \text{wenn } P \text{ auf } \sigma \text{ liegt.} \end{cases}$$

Letzteres trifft wegen $(u, v) = 1$ nur für die Punkte $0 = (0/0)$ und (v/u) zu. Wir definieren nun ³⁾

$$(1) \quad \begin{aligned} (u, v) &= 1, \quad R(u, v) = \sum_{P^{00} \in \mathfrak{S}} \text{sig } P^{00}, \\ S(u, v) &= \sum_{P^{01} \in \mathfrak{S}} \text{sig } P^{01}. \end{aligned}$$



Figur: 1

1) Die Reihenfolge ist so gewählt, um Übereinstimmung mit den Definitionen in [5] zu erreichen.

2) Der absolute Drehwinkel soll kleiner als ein rechter Winkel sein.

3) Diese Summen stimmen mit den ebenso benannten Summen in [5] überein.

Die Einführung der entsprechenden Summen über die Punkte der Art P^{10} oder P^{11} auf \mathfrak{S} ergibt nichts Neues, da, abgesehen vom Punkt (v/u) keine Punkte der Art P^{11} auf \mathfrak{S} liegen und für die Summe über den Punkten der Art P^{10} auf \mathfrak{S} gilt

$$\sum_{P^{10} \in \mathfrak{S}(u,v)} \text{sig } P^{10} = - \sum_{P^{01} \in \mathfrak{S}(v,u)} \text{sig } P^{01} = - S(v, u).$$

Aus den Definitionen der Summen R und S ergibt sich unmittelbar

Satz 1. Für $(u, v) = 1$ gilt

$$\begin{aligned} R(u, v) &= -R(v, u), \\ R(-u, v) &= R(u, -v) = -R(u, v), \\ S(-u, v) &= S(u, -v) = -S(u, v). \end{aligned}$$

§ 2. Das Transformationsverhalten der Summen R und S

Wir untersuchen das Verhalten der Summen $R(u, v)$ und $S(u, v)$ gegenüber den Substitutionen

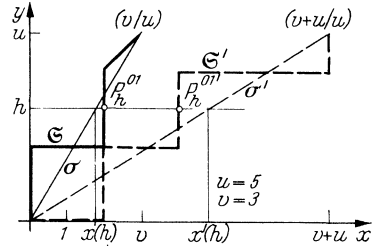
$$u, v \rightarrow u, v + u; \quad u, v \rightarrow u + v, v; \quad (u, v) = 1.$$

Betrachten wir zunächst die Summe $S(u, v)$ bei dem Übergang $u, v \rightarrow u, v + u$.

P_h^{01} sei der durch seine ungerade y -Koordinate h eindeutig bestimmte Gitterpunkt auf $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(u, v)$, $P_h^{01'}$ der entsprechende Punkt auf $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}(u, v + u)$. Aus der Definition der Summe S folgt

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{sig } P_h^{01} &= (-1)^{[x(h)]} \cdot \text{sig } u; \\ \text{sig } P_h^{01'} &= (-1)^{[x'(h)]} \cdot \text{sig } u, \end{aligned}$$

wobei $x(h)$ die x -Koordinate des Schnittpunktes von $\sigma(u, v)$ mit der Geraden $y = h$ ist und $x'(h)$ entsprechend erklärt ist. Es gilt



Figur: 2

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{x(h)}{h} &= \frac{v}{u}; \quad \frac{x'(h)}{h} = \frac{v+u}{u}; \quad u \neq 0 \\ x'(h) &= x(h) + h; \quad [x'(h)] = [x(h)] + h. \end{aligned}$$

Aus (2) und (3) folgt wegen $(h, 2) = 1$

$$\text{sig } P_h^{01'} = -\text{sig } P_h^{01}$$

und damit

Satz 2. Für $(u, v) = 1$ gilt

$$S(u, v + u) = -S(u, v).$$

Wir untersuchen jetzt das Verhalten der Differenz

$$Q(u, v) = S(u, v) - R(u, v)$$

gegenüber dem Übergang $u, v \rightarrow u + v, v$.

Mit \mathfrak{S}_t bezeichnen wir den Teil des Streckenzuges \mathfrak{S} , der zu der festen x -Koordinate t gehört. Die Summe R bzw. S nur über \mathfrak{S}_t erstreckt sollen R_t bzw. S_t heißen. Sei zunächst

$$(v, 2) = 1 \text{ (Figur: 3).}$$

Für $2 \leq |t| \leq |v| - 1$; $(t, 2) = 2$ ist der Schnittpunkt von σ mit \mathfrak{S}_t , wie man sich leicht überlegt, weniger als eine Längeneinheit vom Mittelpunkt $M_t = M_t(u, v)$ von \mathfrak{S}_t entfernt. Es folgt

$$(4) \quad 2 \leq |t| \leq |v| - 1; \quad (t, 2) = 2$$

$$Q_t(u, v) = S_t(u, v) - R_t(u, v) = \begin{cases} \text{sig } M_t; & M_t = P^{01} \\ -\text{sig } M_t; & M_t = P^{00} \end{cases}$$

da sich der Beitrag der übrigen Gitterpunkte auf \mathfrak{S}_t zu Q_t annulliert. Entsprechend gilt

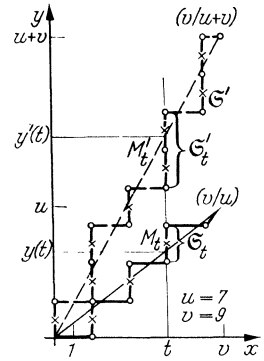
$$2 \leq |t| \leq |v| - 1; \quad (t, 2) = 2$$

$$(4a) \quad Q_t(u + v, v) = \begin{cases} \text{sig } M'_t; & M'_t = P^{01} \\ -\text{sig } M'_t; & M'_t = P^{00} \end{cases}$$

$$M'_t = M_t(u + v, v).$$

Bezeichnen wir die y -Koordinate der Schnittpunkte von $\sigma = \sigma(u, v)$ bzw. $\sigma' = \sigma(u + v, v)$ mit der Geraden $x = t$ mit $y(t)$ bzw. $y'(t)$, so gilt analog (3)

$$(3a) \quad y'(t) = y(t) + t; \quad (t, 2) = 2.$$



Figur: 3

Daraus ist an Hand der Figur 3 zu entnehmen, daß die Signaturen von M_t und M'_t genau dann übereinstimmen, wenn M_t und M'_t äquivalent sind. Mit (4) und (4a) ergibt sich daraus:

$$Q_t(u + v, v) = Q_t(u, v); \quad 2 \leq |t| \leq |v| - 1; \quad (t, 2) = 2.$$

Außerdem gilt

$$Q_0(u + v, v) = Q_0(u, v) = 0,$$

folglich

$$Q(u + v, v) = Q(u, v); \quad (v, 2) = 1.$$

Auch bei geradem v gelten die obigen Überlegungen für $0 \leq |t| \leq |v| - 2$; $(t, 2) = 2$. Hier ist noch der Fall $t = v$ zu betrachten. Aus Figur 4 entnimmt man

$$Q_v(u, v) = \text{sig}(uv); \quad (v, 2) = 2,$$

also

$$Q(u + v, v) = Q(u, v) + \text{sig } v(\text{sig}(u + v) - \text{sig } u); \quad (v, 2) = 2.$$

Wir fassen die beiden Ergebnisse zusammen zu

Satz 3. Für $(u, v) = 1$ gilt

$$S(u + v, v) - R(u + v, v) = S(u, v) - R(u, v) + \frac{1}{2}(1 + (-1)^v) \text{sig } v(\text{sig}(u + v) - \text{sig } u).$$

Ferner gilt⁴⁾

Satz 4. Für $(u, v) = 1$ gilt

$$S(u + v, v) = S(u, v) + S(v, u) + \frac{1}{2} \text{sig } v(\text{sig } \tilde{v} + (-1)^{u+v} \cdot \text{sig } \tilde{u})$$

⁴⁾ Dieser Satz wird in [1] bewiesen.

mit

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & ; (u, 2) = 1 \\ u + v & ; (u, 2) = 2 \end{cases}; \tilde{v} = \begin{cases} v & ; (v, 2) = 1 \\ v + u & ; (v, 2) = 2 \end{cases}.$$

Aus den Sätzen 3 und 4 folgt

Satz 5. Für $(u, v) = 1$ gilt

$$R(u + v, v) = R(u, v) + S(v, u) - \frac{1}{2} \operatorname{sig} v ((-1)^u \operatorname{sig} u + (-1)^v \operatorname{sig} v),$$

$$R(u, v + u) = R(u, v) - S(u, v) + \frac{1}{2} \operatorname{sig} u ((-1)^u \operatorname{sig} u + (-1)^v \operatorname{sig} v).$$

Damit ist die Wirkung der Substitutionen $u, v \rightarrow u + v, v$ und $u, v \rightarrow u, v + u$; $(u, v) = 1$ auf $R(u, v)$ und $S(u, v)$ vollständig beschrieben. Durch doppelte Anwendung der obigen Sätze erhält man das Verhalten der Summen gegenüber den Übergängen $u, v \rightarrow u, v + 2u$; $u, v \rightarrow u + 2v, v$; $(u, v) = 1$, welches besonders übersichtlich wird, wenn eine der Zahlen u, v gerade ist. Dieser Fall wird uns hauptsächlich interessieren.

Satz 6. Für $(u, g) = (u, 2) = 1, (g, 2) = 2$ gilt

$$R(g + 2u, u) = R(g, u) + 1,$$

$$R(g, u + 2g) = R(g, u) + \frac{1}{2} \operatorname{sig} g (\operatorname{sig} (u + 2g) - \operatorname{sig} u),$$

$$R(u + 2g, g) = R(u, g) - \frac{1}{2} \operatorname{sig} g (\operatorname{sig} (u + 2g) - \operatorname{sig} u),$$

$$R(u, g + 2u) = R(u, g) - 1.$$

Satz 7. Für $(u, g) = (u, 2) = 1, (g, 2) = 2$ gilt

$$S(g + 2u, u) = S(g, u) + 1,$$

$$S(g, u + 2g) = S(g, u),$$

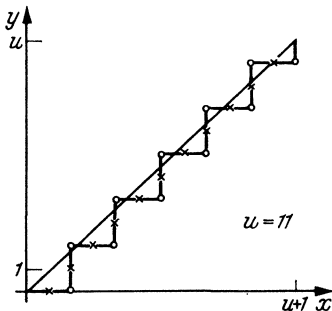
$$S(u + 2g, g) = S(u, g) + \frac{1}{2} \operatorname{sig} g (\operatorname{sig} (u + 2g) - \operatorname{sig} u),$$

$$S(u, g + 2u) = S(u, g).$$

Aus den Transformationssätzen läßt sich noch eine einfache Beziehung zwischen den Summen R und S ableiten, nämlich⁵⁾.

Satz 8. Für $(u, v) = 1$ gilt

$$R(u, v) = (-1)^u S(v, u) - (-1)^v S(u, v).$$



Figur: 4

Wir betrachten hier nur einen Spezialfall dieses Satzes, nämlich: $u > 0$; $(u, 2) = 1$; $v = u + 1$ (Figur 4). In diesem Fall liegen alle Gitterpunkte P^{01} und P^{10} auf \mathcal{S} unterhalb von σ , also gilt

$$S(u, u + 1) = -\frac{u - 1}{2}$$

$$S(u + 1, u) = \frac{u + 1}{2}; \quad u > 0; \quad (u, 2) = 1.$$

⁵⁾ Wegen eines Beweises siehe [1].

Mit Satz 8 berechnet sich daraus $R(u, u + 1) = -1$, was man auch aus Figur 4 abliest:

$$R(u, u + 1) = \text{sig}(v/u - 1) = -1,$$

da sich die Beiträge der übrigen P^{00} auf \mathfrak{S} annullieren. Auf Grund von Satz 8 genügt es, die Summen S zu untersuchen.

§ 3. Die Summen S als Funktionen auf $\Gamma(2)$

Die Matrizen $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2$ bilden eine freie Untergruppe $\Gamma(2)$ der inhomogenen Modulgruppe Γ mit den beiden Erzeugenden

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A und B erzeugen als Elemente der homogenen Modulgruppe Γ_H auch eine Untergruppe $\Gamma_H(2)$ von Γ_H mit der weiteren Nebenbedingung $a \equiv 1 \pmod 4$. Sei für diesen Paragraphen stets

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2).$$

Zu L definieren wir die vier Funktionen⁶⁾

$$(5) \quad \begin{aligned} S_1(L) &= S(a, b); S_2(L) = S(b, a) \\ S_3(L) &= S(c, d); S_4(L) = S(d, c) \end{aligned}$$

Wir untersuchen zunächst das Verhalten dieser Funktionen bei Anwendung der Erzeugenden. Satz 7 liefert

$$S_1(LA) = S(a, b + 2a) = S(a, b) = S_1(L); LA = \begin{pmatrix} a & b + 2a \\ c & d + 2c \end{pmatrix},$$

da a ungerade und b gerade ist. Ebenso folgt

$$\begin{aligned} S_1(LB) &= S(a - 2b, b) = S(a, b) + \frac{1}{2} \text{sig } b (\text{sig}(a - 2b) - \text{sig } a) \\ &= S_1(L) + \frac{1}{2} \text{sig } b (\text{sig}(a - 2b) - \text{sig } a); LB = \begin{pmatrix} a - 2b & b \\ c - 2d & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$S_1(L) = S(a, b)$ nimmt also genau dann einen Summanden ± 1 auf, wenn der in der x, y -Ebene gelegene Punkt (a/b) die y -Achse überschreitet, genauer:

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow L' = LX = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}; X = A^{\pm 1}, B^{\pm 1}$$

$$S(a, b) - S(a', b') = \begin{cases} \text{sig}(ab) & \text{für } -\text{sig } a' = \text{sig } a; \text{sig } b' = \text{sig } b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Anzahl dieser Übergänge beim Aufbau der Matrix $\pm L^7$ durch die (rechten) Faktoren $A^{\pm 1}, B^{\pm 1}$ mit $W_y(L)$, wobei die Übergänge je nach Richtungssinn positiv oder negativ zu zählen sind, so gilt wegen $S_1(E) = S(1, 0) = 0$

$$(6) \quad S_1(L) = S(a, b) = -W_y(L).$$

Entsprechend erhält man

$$(7) \quad S_4(L) = S(d, c) = W_x(L),$$

⁶⁾ Nach Satz 1 gehören diese Funktionen zur inhomogenen Modulgruppe.

⁷⁾ Genau eine dieser beiden Matrizen liegt in $\Gamma_H(2)$.

wobei $W_x(L)$ die Übergänge des Punktes (c/d) über die x -Achse zählt. $S_1(L)$ und $S_4(L)$ können also als Windungszahlen gedeutet werden⁸⁾.

Aus Satz 7 entnimmt man weiter

$$(8) \quad S_2(L) = S(b, a) = F_A(L); \quad S_3(L) = S(c, d) = -F_B(L),$$

wenn $F_A(L)$ die Anzahl der Faktoren A und $F_B(L)$ die Anzahl der Faktoren B in der Produktdarstellung von L durch A und B angibt, wobei die Faktoren A^{-1} und B^{-1} negativ zu zählen sind. (6), (7) und (8) fassen wir zusammen zu

$$\text{Satz 9. } S_1(L) = S(a, b) = -W_y(L); \quad S_2(L) = S(b, a) = F_A(L).$$

$$S_3(L) = S(c, d) = -F_B(L); \quad S_4(L) = S(d, c) = W_x(L).$$

Folgerungen aus Satz 9.

1) Aus $F_A(L^{-1}) = -F_A(L)$ und $F_B(L^{-1}) = -F_B(L)$ folgt mit Satz 9 und $L^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\text{Satz 10. } S(b, a) = S(b, d), \quad S(c, a) = S(c, d).$$

2) Durch die Bedingung $ad - bc = 1$ sind die Punkte (a/b) und (c/d) , besonders was ihr Wechseln des Quadranten betrifft, eng gekoppelt, denn aus $\text{sig } a = \text{sig } b$ folgt $\text{sig } c = \text{sig } d$ und umgekehrt. Das bedeutet, daß die Windungszahlen $W_x(L)$ und $W_y(L)$ fast gleich sein müssen. Die obigen Überlegungen genau durchgeführt ergeben

$$(9) \quad W_y(L) - W_x(L) = \frac{1}{2} \text{sig } c(\text{sig } a - \text{sig } d) = \text{sig } L.$$

Mit Satz 9 ergibt sich also

$$\text{Satz 11. } S(a, b) + S(d, c) = -\text{sig } L.$$

Wir geben für Satz 11 einen kürzeren Beweis. Unter Benutzung von

$$\text{sig } L = \frac{1}{2} \text{sig } c(\text{sig } a - \text{sig } d) = -\frac{1}{2} \text{sig } b(\text{sig } a - \text{sig } d)$$

erhält man mit Satz 7 gleiches Transformationsverhalten beider Seiten von (9) bei Anwendung der Erzeugenden A und B . (9) gilt für $L = E$ und damit für ganz $\Gamma(2)$.

3) Aus Satz 9 ist zu entnehmen, daß alle eindimensionalen Darstellungen von $\Gamma(2)$ mit Hilfe der Summen S angegeben werden können. Eine solche Darstellung $D(L)$ ist bestimmt durch ihre Werte für die beiden Erzeugenden A und B .

$$(10) \quad \begin{aligned} D(A) &= e^\alpha, \quad D(B) = e^\beta; \quad \alpha \text{ und } \beta \text{ beliebig komplex,} \\ D(L) &= e^{(\alpha S(b, a) - \beta S(c, d))}. \end{aligned}$$

Die Darstellung ist genau dann unitär, wenn α und β rein imaginär sind.

Ähnlich wie die Sätze 10 und 11 beweist man auch die beiden folgenden Sätze⁹⁾:

$$\text{Satz 12. } S(a, b) = -S(a, c) = S(d, b) - \text{sig } L$$

$$S(d, c) = -S(d, b) = S(a, c) - \text{sig } L$$

$$\text{Satz 13. } R(a, b) = R(d, b) + \text{sig } L, \quad R(a, c) = R(d, c) - \text{sig } L.$$

⁸⁾ Diese Summen sind im wesentlichen die in [5] definierten Windungszahlen $q^{10}(L)$ und $q^{01}(L)$, genauer gilt

$$-S_1(L) = -S(a, b) = W_y(L) = -q^{10}(L) - \frac{1}{2} \text{sig } b(\text{sig } a - 1),$$

$$S_4(L) = +S(d, c) = W_x(L) = -q^{01}(L) + \frac{1}{2} \text{sig } c(\text{sig } d - 1).$$

Satz 3 von [5] entspricht damit unserem Satz 8.

⁹⁾ Die Beweise sind in [1] durchgeführt.

§ 4. Beziehungen zwischen der Rademacherschen Φ -Funktion und den Summen S auf $\Gamma(2)$

In [2] untersucht R. Dedekind das Verhalten des Logarithmus der η -Funktion gegenüber Modulsstitutionen. Dabei treten Summen der Form

$$(11) \quad s(h, k) = \sum_{\nu=1}^k \left(\left(\frac{\nu}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{h\nu}{k} \right) \right) \text{ mit } ((x)) = \begin{cases} 0; & \text{für } x \text{ ganzrational} \\ x - [x] - \frac{1}{2}; & \text{sonst,} \end{cases}$$

die „Dedekindschen Summen“ auf. Rademacher [6] beschrieb dieses Transformationsverhalten mit Hilfe einer Matrixfunktion der inhomogenen Modulgruppe Γ :

$$(12) \quad \Phi(L) = \begin{cases} \frac{b}{d} & ; c = 0 \\ \frac{a+d}{c} - 12 \operatorname{sig} c \cdot s(a, c); & c \neq 0 \end{cases} ; L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

die der Funktionalgleichung

$$(13) \quad \begin{aligned} \Phi(LL') &= \Phi(L) + \Phi(L') - 3 \operatorname{sig}(cc'c'') \\ L &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, L' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, LL' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

genügt und durch diese eindeutig bestimmt ist.

Wir beschränken uns nun wieder auf $\Gamma(2)$. Für das Weitere sei also stets

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2).$$

Mit Hilfe von L bilden wir

$$(14) \quad L_1 = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c/2 & d \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2c & d \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} a+c & 1/2(b+d-a-c) \\ 2c & d-c \end{pmatrix}$$

und setzen

$$\Phi(L_i) = \Phi_i(L); \quad i = 1, 2, 3.$$

In [3] werden die eindimensionalen, unitären Darstellungen von $\Gamma(2)$ angegeben durch

$$(15) \quad D(A) = e^{\frac{\pi i}{4} \alpha}, \quad D(B) = e^{\frac{\pi i}{4} \beta}; \quad \alpha, \beta \text{ reell}, \quad D(L) = e^{\frac{\pi i}{12} (\alpha(\Phi_1(L) - \Phi_3(L)) + \beta(\Phi_2(L) - \Phi_3(L)))}.$$

Aus (10) und (15) folgt mit Satz 9¹⁰)

$$(16) \quad \begin{aligned} \Phi_3(L) - \Phi_1(L) &= -3S(b, a) = -3F_A(L), \\ \Phi_3(L) - \Phi_2(L) &= 3S(c, d) = -3F_B(L). \end{aligned}$$

In [1] wird noch ein direkter Beweis von (16) gegeben, indem (16) für $L = E$ verifiziert und gleiches Transformationsverhalten beider Seiten von (16) gegenüber den Erzeugenden A und B nachgewiesen wird.

Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, $\Phi(L)$ selbst durch Gitterpunktsummen auszudrücken. Aus der Funktionalgleichung (13) folgt

$$\Phi(LA) = \Phi(L) + 2; \quad \Phi(LB) = \Phi(L) - 1 - 3 \operatorname{sig}(c(2d - c)),$$

¹⁰) Die folgenden Gleichungen sind die in der Einleitung erwähnten Funktionalgleichungen für die Φ -Funktion [3], in denen erstmalig Summen der hier untersuchten Art auftreten.

und daraus

$$\Phi(L) = 2F_A(L) - F_B(L) + 3X(L),$$

wobei $X(L)$ folgende Bedingungen erfüllen muß:

$$\begin{aligned} X(LA) - X(L) &= 0, \\ X(LB) - X(L) &= \operatorname{sig}(c(c-2d)), \\ X(E) &= 0. \end{aligned}$$

$X_1(L) = F_B(L) + \operatorname{sig}(cd)$ genügt bereits

$$X_1(LB) - X_1(L) = \operatorname{sig}(c(c-2d)),$$

jedoch ist

$$X_1(LA) - X_1(L) = \operatorname{sig}(c(d+2c)) - \operatorname{sig}(cd) = 2(W_x(LA) - W_x(L)).$$

Wegen $W_x(LB) - W_x(L) = 0$ erfüllt daher

$$X(L) = X_1(L) - 2W_x(L) = F_B(L) - 2W_x(L) + \operatorname{sig}(cd)$$

die beiden ersten Bedingungen und, wie man sofort sieht, auch die dritte $X(E) = 0$.
Es gilt also

$$\text{Satz 14. } \Phi(L) = 2F_A(L) + 2F_B(L) - 6W_x(L) + 3\operatorname{sig}(cd).$$

Oder mit Satz 9

$$\text{Satz 15. } \Phi(L) = 2S(b, a) - 2S(c, d) - 6S(d, c) + 3\operatorname{sig}(cd).$$

§ 5. Ausdehnung einiger Ergebnisse der §§ 3 und 4 auf ganz Γ

Mit

$$f(L) = S(b, a) - S(b, d); L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

lautet Satz 10

$$f(L) = 0; L \in \Gamma(2).$$

Wir betrachten nun $f(L)$ auf den anderen Restklassen mod $\Gamma(2)$:

$$\Gamma(2)T, \Gamma(2)U, \Gamma(2)TU, \Gamma(2)UT, \Gamma(2)TUT.$$

Für $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f(LT) &= S(-a, b) - S(-a, -c); LT = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}. \\ &= -S(a, b) - S(a, c) \end{aligned}$$

Mit Satz 12 ist also $f(L) = 0; L \in \Gamma(2)T$.

Satz 7 liefert

$$\begin{aligned} f(LU) &= S(a+b, a) - S(a+b, c+d) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sig}(ab) - \operatorname{sig}(a+b)(\operatorname{sig} a + \operatorname{sig} b)) = 0; LU = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also ebenfalls $f(L) = 0; L \in \Gamma(2)U$.

Auf den restlichen drei Restklassen verschwindet $f(L)$ nicht, dafür aber, wie man mit obiger Methode leicht nachweist,

$$g(L) = S(b, a) + S(b, d); L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Für

$$F(L) = S(b, a) + (-1)^{c(a+b+c+d)} \cdot S(b, d); L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

$$= \begin{cases} f(L) & \text{für } L \in \{\Gamma(2), \Gamma(2)T, \Gamma(2)U\} \\ g(L) & \text{für } L \in \{\Gamma(2)TU, \Gamma(2)UT, \Gamma(2)TUT\} \end{cases}$$

gilt somit $F(L) = 0; L \in \Gamma$.

Diese Gleichung ist eine Erweiterung von Satz 10 auf Γ . Da mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ auch $\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} \in \Gamma$, folgt

Satz 16. $S(a, b) = (-1)^{d(a+b+c+d)+1} \cdot S(a, c)$

$$S(b, a) = (-1)^{c(a+b+c+d)} \cdot S(b, d)$$

$$S(c, d) = (-1)^{b(a+b+c+d)} \cdot S(c, a) ; L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

$$S(d, c) = (-1)^{a(a+b+c+d)+1} \cdot S(d, b)$$

Betrachten wir nun das Verhalten der Funktionen $S_i(L); i = 1, \dots, 4$ auf den Nebengruppen von $\Gamma(2)$. Mit Satz 7 berechnet man

$$S_1(LT) = -S_2(L),$$

$$S_1(LU) = -S_1(L), \quad L \in \Gamma(2)$$

$$S_1(LTU) = S_2(L),$$

$$S_1(LUT) = -S_1(L) - S_2(L) + \frac{1}{2}(\text{sig}(a(a+b)) - 1),$$

$$S_1(LTUT) = S_1(L) + S_2(L) + \frac{1}{2}(\text{sig}(a(a-b)) - 1).$$

Entsprechende Formeln ergeben sich für S_2, S_3 und S_4 . Unter Benutzung dieser Formeln läßt sich jede Beziehung zwischen den $S_i(L)$ mit $L \in \Gamma$ auf den Fall $L \in \Gamma(2)$ zurückführen. In diesem Sinn erweist sich

Satz 17. $(-1)^{a+b} ((-1)^d - 1)S(a, b) + ((-1)^c - 1)S(b, a)$

$$+ (-1)^{c+d} ((-1)^b - 1)S(c, d) + ((-1)^a - 1)S(d, c)$$

$$= \frac{1}{2}(\text{sig}(ab) + \text{sig}(cd) + (-1)^{ad}(\text{sig}(ac) + \text{sig}(bd))), L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

als äquivalent mit Satz 11, kann also als dessen Erweiterung auf Γ angesehen werden.

Interessant ist, daß genau für jeden geraden Koeffizienten der Matrix L eine der vier Funktionen $S_i(L)$ aus der obigen Beziehung herausfällt.

Schließlich gestattet auch Satz 15, also die Darstellung der Rademacherschen Φ -Funktion durch die Gitterpunktsummen S eine Erweiterung, nämlich ¹¹⁾

Satz 18. Für $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma; abcd \neq 0$ gilt

$$\Phi(L) = \alpha S(a, c) + \beta S(c, a) + \gamma S(b, d) + \delta S(d, b) + \sigma \text{sig}(ac) + 2 \text{sig}(cd)$$

mit

$$\alpha = -((-1)^c - (-1)^d); \quad \beta = ((-1)^a - (-1)^b)$$

$$\gamma = -(1 + 3(-1)^d); \quad \delta = (1 + 3(-1)^b)$$

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2}(1 + (-1)^{ad} + (-1)^{cd} - (-1)^{ab}).$$

¹¹⁾ Die in [1] berechnete, für die ganze Modulgruppe gültige Darstellung (Satz 19) läßt sich mit Hilfe der Sätze 16 und 17 in die hier angegebene, symmetrische Form bringen.

§ 6. Der Zusammenhang der Gitterpunktsummen S und R mit den Dedekindschen Summen

Die Rademachersche Φ -Funktion ist, wie ihre Definition (12) zeigt, im wesentlichen eine ganzzahlig gemachte Dedekindsche Summe. Es besteht also ein Zusammenhang dieser Summen mit den Gitterpunktsummen S . Aus Satz 18 und (12) folgt sogar eine allgemeine Darstellung der Dedekindschen Summen durch die Summen S .

In diesem Paragraphen wollen wir die Verwandtschaft dieser beiden Summen direkt aus ihren Definitionen (1) und (11), ohne den Umweg über die Rademachersche Φ -Funktion und deren Transformationsverhalten ableiten.

Das soll auf zwei Weisen geschehen.

Erstens kann man die Summendarstellung von S so umformen, daß sich ein einfacher Zusammenhang von S (und R) mit den ebenso benannten Hilfssummen in der von H. Rademacher und A. Whiteman gegebenen Theorie der Dedekindschen Summen [7] ergibt, der es gestattet, die Gitterpunktsummen durch die Differenz dieser Hilfssummen auszudrücken.

Dadurch fügen sie sich in diese Theorie ein, was ihre Verwandtschaft mit den Dedekindschen Summen arithmetisch aufdeckt.

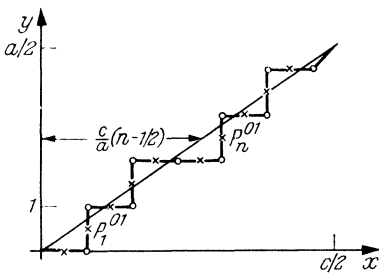
Der zweite Weg besteht in einer geeigneten geometrischen Interpretation der Summe rechts in (11), mit deren Hilfe man auch der Dedekindschen Summe $s(a, c)$ den bei der Definition von $S(a, c)$ (und $R(a, c)$) auftretenden Streckenzug $\mathfrak{S}(a, c)$ zuordnen kann, wodurch sich ein mehr geometrischer Zusammenhang der Summen andeutet.

Sei nun für den Rest dieses Paragraphen a, c ein teilerfremdes, nichtverschwindendes Zahlenpaar

$$(a, c) = 1; \quad ac \neq 0.$$

Die in [7] benutzten Hilfsfunktionen sind

$$S'(a, c) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{|c|-1}{2} \rfloor} \left(\left(\frac{a}{c} n \right) \right); \quad R'(a, c) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{|c|-1}{2} \rfloor} \left(\left(\frac{a}{c} n - \frac{1}{2} \right) \right).$$



Figur: 5

Um die Gitterpunktsummen mit diesen Summen in Verbindung zu bringen, versuchen wir, auch sie durch die Doppelklammern auszudrücken. Figur 5 entnimmt man

$$\text{sig } P_n^{01} = -\text{sig} \left(\left(\frac{c}{a} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right) \right) \quad n = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{|a|}{2} \right\rfloor,$$

also

$$S(a, c) = -\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{|a|}{2} \rfloor} \text{sig } P_n^{01} = -\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{|a|}{2} \rfloor} \text{sig} \left(\left(\frac{c}{a} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right) \right).$$

Für ungerades a ergibt das

$$S(a, c) = -\sum_{n=1}^{\frac{|a|-1}{2}} \text{sig} \left(\left(\frac{c}{a} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right) \right) = -\sum_{n=1}^{\frac{|a|-1}{2}} \text{sig} \left(\left(\frac{c}{a} \left(\frac{a}{2} - n \right) \right) \right) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\frac{|a|-1}{2}} \text{sig} \left(\left(\frac{c}{a} n \right) \right); & (c, 2) = 2, \\ -\sum_{n=1}^{\frac{|a|-1}{2}} \text{sig} \left(\left(\frac{c}{a} n \right) \right); & (c, 2) = 1, \end{cases}$$

$$(17) \quad S(a, c) = (-1)^c \sum_{n=1}^{\frac{|a|-1}{2}} \text{sig} \left(\left(\frac{c}{a} n \right) \right); \quad (a, 2) = 1.$$

Aus Figur 5 liest man auch noch die folgende Relation ab:

$$(18) \quad R(a, c) - S(a, c) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{|c|-1}{2} \rfloor} \text{sig} \left(\left(\frac{c}{a} n \right) \right) - \frac{1}{2} (1 + (-1)^c) \text{sig}(ac).$$

Der letzte Term ist der Beitrag des Punktes $\left(\frac{c}{2} / \frac{a - \text{sig } a}{2} \right)$, der nur bei geradem c auftritt. Aus (17) und (18) folgt

$$R(a, c) = (-1)^c \sum_{n=1}^{\frac{|a|-1}{2}} \text{sig} \left(\left(\frac{c}{a} n \right) \right) + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{|c|-1}{2} \rfloor} \text{sig} \left(\left(\frac{c}{a} n \right) \right) - \frac{1}{2} (1 + (-1)^c) \text{sig}(ac)$$

für ungerades a , was man auch in der folgenden, symmetrischen Gestalt schreiben kann:

$$(19) \quad R(a, c) = \left((-1)^c \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{|a|-1}{2} \rfloor} \text{sig} \left(\left(\frac{c}{a} n \right) \right) - \frac{1}{2} \text{sig}(ac) (1 + (-1)^c) \right) - \left((-1)^a \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{|c|-1}{2} \rfloor} \text{sig} \left(\left(\frac{a}{c} n \right) \right) - \frac{1}{2} \text{sig}(ac) (1 + (-1)^a) \right)$$

Da beide Seiten von (19) schiefssymmetrisch in a, c sind und wegen $(a, c) = 1$ mindestens eine dieser Zahlen ungerade ist, gilt (19) allgemein.

Es ergeben sich noch eine ganze Reihe weiterer Beziehungen, zum Teil auch solche, in denen die Gitterpunktsummen selbst nicht auftreten. Wir teilen hier einige ohne Beweis mit:

$$\begin{aligned} S(a, c) + S(c, a) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{|c|} \text{sig} \left(\left(\frac{a}{2c} n \right) \right) + \frac{1}{2} \text{sig}(ac); (c, 2) = 2 \\ S(a, c) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{|a|-1} \text{sig} \left(\left(\frac{c}{2a} n \right) \right); (a, 2) = (c, 2) = 1 \\ S(a, c) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{|c|} \text{sig} \left(\left(\frac{a}{2c} n \right) \right) (-1)^n + \frac{1}{2} \text{sig}(ac); (c, 2) = 2. \end{aligned}$$

Aus (17) und der letzten Formel folgt

$$\sum_{n=1}^{\frac{|a|-1}{2}} \text{sig} \left(\left(\frac{c}{a} n \right) \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{|c|} \text{sig} \left(\left(\frac{a}{2c} n \right) \right) (-1)^n = \frac{1}{2} \text{sig}(ac); (c, 2) = 2.$$

Der Zusammenhang der Gitterpunktsummen mit der Differenz der Hilfssummen R' und S' ergibt sich nun aus

$$\text{sig}((x)) = 2 \left(((x)) - \left(\left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \right),$$

also

$$(20) \quad D(a, c) = R'(a, c) - S'(a, c) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{|c|-1}{2} \rfloor} \text{sig} \left(\left(\frac{a}{c} n \right) \right).$$

Mit (20) folgt aus (17) und (19)

$$(21) \quad S(a, c) = -2(-1)^c \cdot D(c, a); (a, 2) = 1$$

und

$$(22) \quad R(a, c) = 2(-1)^a D(a, c) - 2(-1)^c D(c, a) + \frac{1}{2} \text{sig}(ac) ((-1)^a - (-1)^c).$$

Die entsprechende Darstellung von $S(a, c)$ für gerades a berechnen wir aus (21) und (22) mit Satz 8:

$$(23) \quad S(a, c) = 4D(a, c) + 2D(c, a) + \text{sig}(ac); (a, 2) = 2.$$

Der Zusammenhang der Gitterpunktsummen mit den Dedekindsommen ergibt sich damit aus den in [7] aufgestellten Beziehungen zwischen den Dedekindsommen und den Hilfssommen R' und S' .

Wir wollen nun noch zeigen, auf welche Weise man der Summe

$$s(a, c) = \sum_{\mu \bmod c} \left(\left(\frac{\mu}{c} \right) \right) \left(\left(\frac{a\mu}{c} \right) \right); (a, c) = 1 \quad ac \neq 0$$

den auch zur Gitterpunktsumme $S(a, c)$ gehörigen Streckenzug $\mathfrak{S}(a, c)$ zuordnen kann. Sei für das Folgende $a, c > 0$. Eine einfache Umformung ergibt

$$(25) \quad s(a, c) = \frac{1}{c^2} r(a, c) - \frac{1}{4}(c - 1)$$

mit¹²⁾

$$(26) \quad r(a, c) = \sum_{\mu=0}^c \mu \{a\mu\}_c,$$

wobei $\{x\}_y$ erklärt ist durch

$$\{x\}_y \equiv x \bmod y; 0 \leq \{x\}_y < y; y > 0.$$

Läuft μ von 0 bis c , so muß $a\mu$ genau a mal zu $\{a\mu\}_c$ reduziert werden. Die Berechnung von $r(a, c)$ läuft nun im wesentlichen auf die Bestimmung dieser a Reduktionsstellen $\mu_i; i = 1, 2, \dots, a$ hinaus. Sei

$$(\mu_i - 1)a < ic \leq \mu_i a; i = 1, 2, \dots, a$$

$$(27) \quad \frac{\mu_i - 1}{i} < \frac{c}{a} \leq \frac{\mu_i}{i}.$$

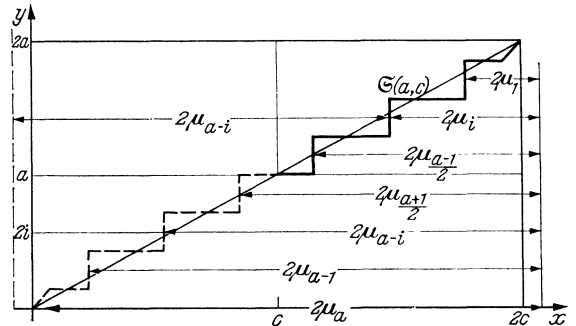
Damit erhalten wir für $r(a, c)$

$$(28) \quad \begin{aligned} r(a, c) &= \sum_{\mu=0}^c \mu \{a\mu\}_c = \sum_{\mu=0}^c \mu(a\mu) - c \left(\sum_{\mu=\mu_1}^c \mu + \sum_{\mu=\mu_2}^c \mu + \dots + \sum_{\mu=\mu_a}^c \mu \right) \\ r(a, c) &= \frac{c}{2} \sum_{i=1}^a (\mu_i^2 - \mu_i) - \frac{1}{6} ac(c^2 - 1). \end{aligned}$$

Aus (25) und (28) folgt

$$(29) \quad \begin{aligned} s(a, c) &= \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^a (\mu_i^2 - \mu_i) \\ &- \frac{1}{6} \frac{a}{c} (c^2 - 1) - \frac{1}{4}(c + 1); \\ (a, c) &= 1; a, c > 0. \end{aligned}$$

In Figur 6 ist der Zusammenhang der μ_i mit dem Streckenzug $\mathfrak{S}(a, c)$ für ungerades a dargestellt.



Figur: 6

¹²⁾ $r(a, c)$ steht in einfacher Beziehung zu der bei C. Meyer (Crelle-Journal 198 (1957)) auftretenden Inversionszahl $I(a, c)$ (Formel (5. 10)). Genauer gilt:

$$I(a, c) + \frac{3}{c} r(a, c) = (c - 1) \left(c - \frac{1}{2} \right); (a, c) = 1 \quad a, c > 0.$$

§ 7. Bestimmung der Summen R und S mod 4 und ihr Zusammenhang mit den quadratischen Resten

Es besteht die Kongruenz

$$(30) \quad \begin{aligned} (a, c) &= 1, (a, 2) = 2, (c, 2) = 1. \\ S(a, c) &\equiv \frac{1}{2}(c^2 - 3ac + 4a - 1) \pmod{8}. \end{aligned}$$

Beide Seiten von (30) zeigen nämlich, wie man Satz 7 entnehmen kann, mod 8 gleiches Transformationsverhalten gegenüber den Substitutionen $a, c \rightarrow a, c + 2a$; $a, c \rightarrow a + 2c, c$. Für das Zahlenpaar 0, 1 gilt (30). Da sich aber alle Zahlenpaare a, c , die den Voraussetzungen von (30) genügen, durch die angegebenen Substitutionen aus dem Zahlenpaar 0, 1 ableiten lassen, ist (30) bewiesen. Aus (30) folgt

$$(31) \quad \begin{aligned} (a, c) &= 1, (a, 2) = 2 \\ S(a, c) &\equiv \frac{1}{2}ac \pmod{4}. \end{aligned}$$

Wir leiten nun mit Hilfe des verallgemeinerten Gaußschen Lemmas eine weitere Kongruenz ab. Dieses Lemma besagt:

Sei $(a, c) = (c, 2) = 1$; $a \neq 0, c > 0$, dann gilt

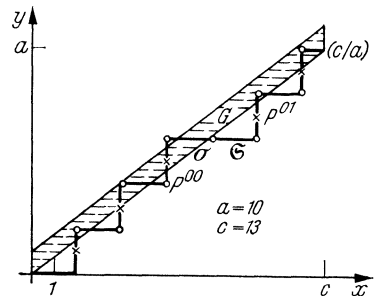
$$(32) \quad \left(\frac{a}{c}\right) = (-1)^m,$$

wobei $\left(\frac{a}{c}\right)$ das Jacobisymbol bedeutet und m die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von $-|c| < a(2x) - c(2y) < 0, 0 < 2x < |c|$

ist. $a(2x) - c(2y) = 0$ entspricht der Geraden $2y = \frac{a}{c}2x$ und $a(2x) - c(2y) = -|c|$ der Geraden $2y = \frac{a}{c}2x + \frac{1}{\text{sig } a}$, m ist also die Anzahl der Gitterpunkte der Art P^{00} im Gebiet G (Figur 7). Zunächst sieht man, daß alle Gitterpunkte der Art P^{00} in G auf dem zur Summe $S(a, c)$ gehörigen Streckenzug $\mathfrak{S}(a, c)$ liegen. Weiter ist zu erkennen, daß genau zu jedem Punkt P^{00} auf \mathfrak{S} „oberhalb“¹³⁾ von σ , der nicht in G liegt, ein Punkt der Art P^{01} auf \mathfrak{S} kommt, der „oberhalb“¹³⁾ von σ liegt.

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} (a, c) = (c, 2) = 1; a \neq 0, c > 0 \\ R(a, c) - S(a, c) = 2m - \frac{1}{2}(c - 1), \end{aligned}$$



Figur: 7

woraus mit (32) folgt

$$(33) \quad \begin{aligned} (a, c) = (c, 2) = 1; a \neq 0, c > 0 \\ R(a, c) - S(a, c) \equiv \left(\frac{a}{c}\right) - \frac{1}{2}(c + 1) \pmod{4}. \end{aligned}$$

(33) gilt auch für $a = 0$, also $c = 1$. Mit Satz 8 erhalten wir

$$(34) \quad \begin{aligned} (a, c) = (c, 2) = 1; c > 0 \\ S(c, a) \equiv (-1)^a \left(\left(\frac{a}{c}\right) - \frac{1}{2}(c + 1) \right) \pmod{4}. \end{aligned}$$

¹³⁾ Für $a < 0$ lese man „unterhalb“.

Aus (31) und (33) ergibt sich

$$(35) \quad \begin{aligned} (a, c) &= 1, (a, 2) = 2, c > 0 \\ R(a, c) &\equiv \left(\frac{a}{c}\right) + \frac{1}{2}(ac - c - 1) \pmod{4}. \end{aligned}$$

Unter Benutzung von Satz 5 folgt weiter aus (34) und (35)

$$(36) \quad R(a, c) \equiv \frac{1}{2}ac - c + \frac{1}{2} \pmod{4}; (a, c) = (a, 2) = (c, 2) = 1; a, c > 0.$$

Aus (33) und (36) berechnen wir schließlich

$$(37) \quad \begin{aligned} (a, c) &= (a, 2) = (c, 2) = 1; a, c > 0 \\ S(a, c) &\equiv -\left(\frac{a}{c}\right) + \frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}c + 1 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Damit sind die Summen R und $S \pmod{4}$ bestimmt. Ihr Zusammenhang mit den quadratischen Resten liegt im Bestehen etwa der Kongruenz (33), in welche das Jacobisymbol durch das verallgemeinerte Gaußsche Lemma hineinkommt. Das Gaußsche Reziprozitätsgesetz, das wir ebenfalls als Kongruenz $\pmod{4}$ schreiben können:

$$(38) \quad \begin{aligned} (a, c) &= (a, 2) = (c, 2) = 1; a, c > 0 \\ \left(\frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{a}\right) &\equiv 2\left(1 + \frac{(a-1)(c-1)}{4}\right) \pmod{4} \end{aligned}$$

ist nach (33) gleichbedeutend mit der Kongruenz

$$S(a, c) + S(c, a) \equiv \frac{1}{2}(a + c + 2) - 2\left(1 + \frac{(a-1)(c-1)}{4}\right) \pmod{4},$$

die sich vereinfachen läßt zu

$$(39) \quad \begin{aligned} (a, c) &= (a, 2) = (c, 2) = 1; a, c > 0 \\ S(a, c) + S(c, a) &\equiv \frac{1}{2}(ac - 1) \pmod{4}. \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen von (39) ergibt sich aus (34) und (37)

$$S(a, c) + S(c, a) \equiv -2\left(\frac{a}{c}\right) + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ac + 1 - \frac{1}{2}c \pmod{4}.$$

Wir können hierin für das Jacobisymbol -1 einsetzen, da ein eventueller Fehler kongruent $0 \pmod{4}$ ist. Dann wird aus der obigen Kongruenz aber gerade die Kongruenz (39). Damit ist (39), also auch das Gaußsche Reziprozitätsgesetz bewiesen. Da bei der Ableitung der Kongruenz (33) das Gaußsche Lemma benutzt wurde, handelt es sich jedoch nicht um einen wesentlich neuen Beweis.

Literaturverzeichnis

- [1] K. Burde, Reziprozitätsgesetze für Gitterpunktsommen. Dissertation Göttingen 1964.
- [2] R. Dedekind, Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann. Ges. Math. Werke, Bd. I, S. 159—172.
- [3] W. Maak, Fastperiodische Funktionen auf der Modulgruppe. Math. Scand. **3** (1955), 44—48.
- [4] W. Maak, Transformationsverhalten der Funktionen $\log \sigma_{rs}$. Seminar Prof. Maak, Math. Inst. Göttingen, Bericht Nr. 7 (1962).
- [5] W. Maak, Gitterpunktsätze. Nachrichten der Wissenschaften in Göttingen, II. Math.-Phys. Klasse (1964).
- [6] H. Rademacher, Zur Theorie der Modulfunktionen. J. f. d. reine und angew. Math. **167** (1932), 312—336.
- [7] H. Rademacher and A. Whiteman, Theorems of Dedekind Sums. American Journal of Mathematics **63** (1941), 377.